# Глава 5

# Линейное программирование

*Задача линейного программирования* — это задача выбора таких неотрицательных значений некоторых переменных, подчиненных системе ограничений в форме линейных неравенств, при которых достигается максимум или минимум данной линейной функции [1].

В обозначениях раздела 2.1 задача линейного программирования на максимум состоит в следующем: требуется найти

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{cx} \tag{5.0.1}$$

при условии, что $\mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geqslant 0$,

или в развернутом виде найти

$$\max_{x_1, x_2, \ldots, x_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

при условии, что

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0. \end{gathered} \tag{5.0.2}$$

Эта задача является частным случаем задачи нелинейного программирования (4.0.1), в которой целевая функция и функции ограничений нелинейны.

Величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — составляющие $n$-мерного вектора-столбца $\mathbf{x}$ — представляют собой инструментальные переменные. Используемые в этой задаче константы состоят из постоянных коэффициентов $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$; $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}$, входящих в матрицу $\mathbf{A}$ размерности $m \times n$, $m$ констант ограничений $b_1, b_2, \ldots, b_m$, являющихся компонентами вектора-столбца $\mathbf{b}$, и из $n$ постоянных коэффициентов целевой функции $c_1, c_2, \ldots, c_n$, являющихся компонентами вектора-строки $\mathbf{c}$. Предположим, что $m$ и $n$ — конечные числа, матрица $\mathbf{A}$ и векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ состоят из фиксированных вещественных чисел, а $\mathbf{x}$ — любой вещественный вектор, удовлетворяющий $m + n$ ограничениям [1] из (5.0.1).

Как и в предыдущей главе, каждое из $n$ ограничений неотрицательности

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{5.0.3}$$

определяет некоторое замкнутое полупространство, а пересечение всех таких полупространств представляет собой неотрицательный ортант $n$-мерного евклидова пространства $E^n$. Каждое из $m$ ограничений-неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{5.0.4}$$

также определяет замкнутое полупространство в $E^n$, а именно множество точек, либо принадлежащих гиперплоскости

$$\left\{\mathbf{x} \in E^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\right\}, \tag{5.0.5}$$

либо расположенных по одну сторону от этой гиперплоскости. Например, в $E^3$ такое множество составляют все точки, лежащие ниже некоторой плоскости или принадлежащие этой плоскости. В общем случае пересечение

---

[1] Основная литература по линейному программированию: Гейл [1], Хедли [2], Данциг [3], Гасс [4], Симонар [5].

[1] Задача, в которой число переменных или число ограничений бесконечно, называется *задачей бесконечномерного линейного программирования* (см. работу Даффина [6]).

Если $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ или $\mathbf{c}$ содержат случайные элементы, то задача относится к числу задач стохастического линейного программирования, рассмотренных в работах Чарнса и Купера [7], Маданского [8, 9] и Данцига [3].

Если одна или несколько независимых переменных могут принимать только целочисленные значения, то приходим к задаче *целочисленного линейного программирования*. См. работы Данцига [10,3], Балинского [11] и Симонара [5].

замкнутых полупространств из $E^n$ представляет собой выпуклое многогранное множество, или выпуклый многогранник, если это множество ограничено. Таким образом, допустимое множество, то есть множество всех инструментальных векторов, удовлетворяющих $m+n$ ограничениям неотрицательности и ограничениям-неравенствам из (5.0.2),

$$X = \{\mathbf{x} \in E^n \mid \mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant 0\} \qquad (5.0.6)$$

представляет собой замкнутое выпуклое многогранное множество, расположенное в неотрицательном ортанте $n$-мерного евклидова пространства. На рис. 2.5 и 5.1 представлены примеры допустимых множеств в $E^2$ и в $E^3$.

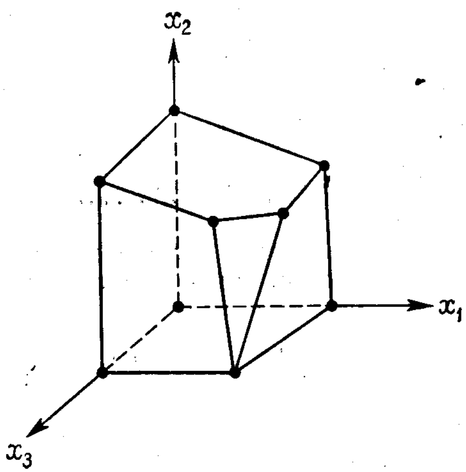


**Рис. 5.1. Допустимое множество задачи линейного программирования при $n = 3$, $m = 4$.**

Граничные гиперплоскости называются *гранями*, а точки, в которых пересекаются $n$ или больше граней, называются *вершинами*. Каждая грань состоит из всех таких точек, в которых одно из неравенств или ограничений неотрицательности выполняется как равенство, а каждая вершина представляет собой точку, в которой $n$ или более ограничений-неравенств выполняются как равенства. Многогранник на рис. 5.1 имеет 7 граней и 9 вершин. В восьми из этих вершин пересекаются по три грани, а в одной — четыре грани. Вершины связаны ребрами, в каждом из которых пересекаются по две грани.

Поверхность уровня целевой функции

$$\{\mathbf{x} \in E^n \mid \mathbf{cx} = \text{const}\} \qquad (5.0.7)$$

представляет собой гиперплоскость в $E^n$. Если придавать константе в (5.0.7) различные значения, то получим семейство параллельных гиперплоскостей. Примером такого семейства являются параллельные прямые на рис. 2.5. *Направление наискорейшего роста* задается градиентом

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c}, \qquad (5.0.8)$$

т. е. вектором-строкой из $E^n$, ортогональным к поверхности уровня. С геометрической точки зрения задача линейного программирования состоит в отыскании точки (или множества точек) в $E^n$, принадлежащей допустимому выпуклому многогранному множеству, в которой достигается поверхность наибольшего уровня. Из геометрических представлений ясно, что если решение существует, то оно не может быть внутренней точкой, а должно принадлежать границе допустимого множества. Следовательно, решением может являться точка, принадлежащая одной или нескольким граням, или, что эквивалентно, решением является одна вершина или несколько вершин и все точки, лежащие между этими вершинами, т. е. все выпуклые линейные комбинации этих вершин. Решение достигается в той точке (в тех точках), где поверхность уровня представляет собой опорную гиперплоскость данного выпуклого многогранного допустимого множества. На рис. 2.5 даны иллюстрации двух случаев: когда решение достигается в одной вершине и является единственным и когда решение достигается в двух вершинах (на всей грани), т. е. когда решение неединственно. В последнем случае угол наклона параллельных линий уровня равняется углу наклона наивысшей граничной гиперплоскости — в данном случае прямой в $E^2$. Решение достигается в двух вершинах и во всех точках прямой, соединяющей эти вершины. В трехмерном пространстве решением может быть точка вершины (пересечение трех или больше граней), отрезок прямой (пересечение двух граней) или часть некоторой плоскости (грань). Хотя решение может быть неединственным, максимальное значение целевой функции единственно. Так как допустимое множество выпукло, а целевая функция линейна, то по теореме о достаточных условиях существования максимума из раздела 2.2 локальный максимум является глобальным. Следовательно, если в вершине допустимого множества целевая функция принимает значение большее (большее или равное), чем во всех соседних вершинах, то данная вершина является решением задачи. На этом важном свойстве основан алгоритм симплекс-метода, который будет рассматриваться ниже. Кроме того, если $n > m$, то решение непременно достигается в такой вершине допустимого множества, в которой по меньшей мере $n - m$ переменных равны нулю. Иначе говоря, хотя бы одна из точек решения имеет по крайней мере столько ненулевых координат, сколько ограничений-неравенств входит в формулировку задачи.

Так как целевая функция непрерывна, а допустимое множество замкнуто, то по теореме Вейерштрасса (см. раздел 2.2) решение существует в том случае, если допустимое множество непусто и ограничено. Следовательно, возможны два случая, когда задача линейного программирования не может иметь решения. Первый: ограничения являются несовместными, так что допустимое множество пусто. Например, ограничение $x_8 \leqslant -6$ противоречит неотрицательности и, следовательно, не существует точки, удовлетворяющей этим двум ограничениям. Другой пример: неравенства $x_1 + 2x_2 \leqslant 6$ и $-x_1 - x_2 \leqslant -8$ не имеют общих точек в неотрицательном ортанте.

Вторым случаем, когда задача не может иметь решения, является неограниченность допустимого множества. В этом случае целевая функция может неограниченно возрастать. Примером может служить задача максимизации функции $x_1 + x_2$ при условии, что $-x_1 - x_2 \leqslant -8$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$. На рис. 5.2 приведены еще два примера задач линейного программирования, не имеющих решения. Здесь точки допустимого множества отмечены штриховкой.

Если допустимое множество непусто и ограничено, то решение существует и достигается в граничной точке. Решение существует и в более общем случае, когда допустимое множество непусто, а целевая функция ограничена.



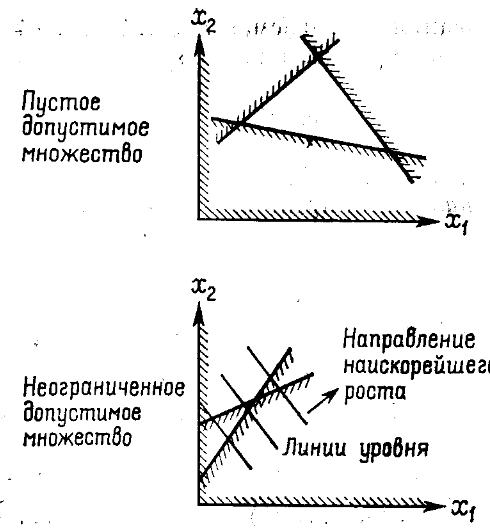


**Рис. 5.2.** Два случая, при которых задача линейного программирования не имеет решения.

Итак, задача линейного программирования либо имеет единственное решение (в вершине), либо бесконечное множество решений, либо не имеет решений (если допустимое множество пусто или не ограничено) [1].

## 5.1. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В теории линейного программирования чрезвычайно важную роль играет то обстоятельство, что каждой задаче линейного программирования соответствует некоторая двойственная задача. Если исходная задача линейного

[1] Отметим, что такие же три возможности существуют и при решении уравнения с одним неизвестным $ax = b$. Если $a \neq 0$, то существует единственное решение; если $a = b = 0$, то решений бесконечно много; если $a = 0$, но $b \neq 0$, то задача не имеет решений.

программирования, называемая *прямой задачей*, является задачей на максимум типа (4.0.1):

найти

$$\max_{\mathbf{x}} F = \mathbf{c}\mathbf{x} \tag{5.1.1}$$

при условии, что $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geqslant 0$,

то *двойственная задача* представляет собой задачу на минимум: найти

$$\min_{\mathbf{y}} G = \mathbf{y}\mathbf{b} \tag{5.1.2}$$

при условии, что $\mathbf{y}\mathbf{A} \geqslant \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \geqslant 0$.

Здесь $\mathbf{y}$ есть вектор-строка

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m). \tag{5.1.3}$$

Запишем двойственную задачу линейного программирования в развернутом виде: найти

$$\min_{y_1, y_2, \ldots y_m} G(y_1, y_2, \ldots, y_m) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$$

при условии, что

$$\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geqslant c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geqslant c_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geqslant c_n \\ y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0, \ldots, y_m \geqslant 0. \end{array} \tag{5.1.4}$$

Сопоставим задачи (5.0.2) и (5.1.4). Общим для этих задач является то, что в каждой из них отыскивается экстремум линейной функции при условии, что переменные неотрицательны и удовлетворяют системе линейных неравенств. В обеих задачах используются одни и те же параметры, а именно матрица $\mathbf{A}$, вектор-столбец $\mathbf{b}$ и вектор-строка $\mathbf{c}$. Число ограничений-неравенств в этих задачах равно $m + n$; каждая из задач имеет геометрическую интерпретацию.

С другой стороны, в прямой задаче определяются значения $n$ переменных — компонент вектора-столбца $\mathbf{x}$, а в двойственной задаче — $m$ переменных, являющихся компонентами вектора-строки $\mathbf{y}$; в исходной задаче определяется максимум, а в двойственной — минимум; знаки неравенств в этих задачах различны; константы ограни-



| | $x_1$ | $x_2$ | | $x_n$ | $-1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | $b_1$ | $\leq 0$ |
| $y_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ | $b_2$ | $\leq 0$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $y_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | $b_m$ | $\leq 0$ |
| $-1$ | $c_1$ | $c_2$ | $\cdots$ | $c_n$ | $0$ | $= F$ (*найти максимум*) |
| | $\geq 0$ | $\geq 0$ | | $\geq 0$ | $= G$ (*найти минимум*) | |

**Рис. 5.3. Таблица для двойственных задач линейного программирования.**

чений одной из задач являются коэффициентами целевой функции другой. Если применить к двойственной задаче те же преобразования, какие были сделаны для прямой задачи, то мы вновь придем к исходной задаче, то есть задача, двойственная к двойственной задаче, представляет собой исходную задачу. Следовательно, ни одна из этих задач не может считаться основной, так как если поставлена одна из задач, то другая может быть сформулирована как двойственная и каждая из них является двойственной по отношению к другой.

На рис. 5.3 двойственные задачи линейного программирования представлены в виде таблицы. Прочитаем эту таблицу слева направо, умножая элементы, стоящие внутри клетки, на соответствующие переменные из верхней строки и складывая эти произведения. В результате получим задачу максимизации. Читая сверху вниз и умножая элементы, стоящие внутри клетки, на соответствующие переменные из левого столбца и складывая эти произведения, приходим к задаче минимизации. Нулевой элемент в нижнем правом углу таблицы можно в принципе заменить любой другой константой, вычитаемой из обеих целевых функций.

## 5.2. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА; ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ И ТЕОРЕМА О ДОПОЛНЯЮЩЕЙ НЕЖЕСТКОСТИ

Метод множителей Лагранжа позволяет проанализировать основные свойства двойственных задач, поскольку двойственные переменные можно считать множителями Лагранжа для прямой задачи. Рассмотрим задачу максимизации: найти

$$\max_{\mathbf{x}} F = \mathbf{cx} \quad \text{при условии, что} \quad \mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \tag{5.2.1}$$

как прямую задачу линейного программирования. Пусть функция Лагранжа определена следующим образом:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{cx} + \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) = \mathbf{cx} + \mathbf{yb} - \mathbf{yAx}. \tag{5.2.2}$$

Тогда, согласно теореме Куна — Таккера из предыдущей главы, $\mathbf{x}^*$ будет решение задачи (5.2.1), если существует вектор-строка $\mathbf{y}^*$ такой, что в $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ выполняются условия Куна — Таккера, имеющие вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c} - \mathbf{yA} \leqslant 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x} = (\mathbf{c} - \mathbf{yA}) \mathbf{x} = 0 \\
\mathbf{x} \geqslant 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax} \geqslant 0 \\
\mathbf{y} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) = 0 \\
\mathbf{y} \geqslant 0.
\end{gathered} \tag{5.2.3}$$

Пусть теперь в качестве прямой задачи рассматривается задача минимизации: найти

$$\min_{\mathbf{y}} G = \mathbf{yb} \tag{5.2.4}$$

$$\text{при условии, что} \quad \mathbf{yA} \geqslant \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}.$$

Определим функцию Лагранжа как

$$L(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{yb} + (\mathbf{c} - \mathbf{yA})\mathbf{x} = \mathbf{yb} + \mathbf{cx} - \mathbf{yAx}. \tag{5.2.5}$$

Тогда из теоремы Куна — Таккера следует, что $\mathbf{y}^*$ будет решением, если существует вектор-столбец $\mathbf{x}^*$, такой, что в $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ выполняются условия Куна — Таккера, имеющие вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax} \geqslant 0 \\
\mathbf{y} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) = 0 \\
\mathbf{y} \geqslant 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{c} - \mathbf{yA}) \leqslant 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x} = (\mathbf{c} - \mathbf{yA}) \mathbf{x} = 0 \\
\mathbf{x} \geqslant 0.
\end{gathered} \tag{5.2.6}$$

Таким образом, функции Лагранжа и условия Куна — Таккера в обеих задачах в точности одни и те же. На приведенных выше условиях базируются основные теоремы линейного программирования.

Первой основной теоремой является *теорема существования*: для того чтобы задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы допустимые множества как прямой, так и двойственной задач были непусты.

Для доказательства того, что в обеих задачах существуют допустимые векторы, рассмотрим ограничения-неравенства в двойственных задачах

$$\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b} \tag{5.2.7}$$

$$\mathbf{yA} \geqslant \mathbf{c}. \tag{5.2.8}$$

Так как вектор $\mathbf{y}$ неотрицателен, то

$$\mathbf{yAx} \leqslant \mathbf{yb} = G(\mathbf{y}), \tag{5.2.9}$$

и так как вектор $\mathbf{x}$ неотрицателен, то

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{cx} \leqslant \mathbf{yAx}. \tag{5.2.10}$$

Следовательно, если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ есть допустимые векторы, то

$$F(\mathbf{x}) \leqslant G(\mathbf{y}), \tag{5.2.11}$$

т. е. значения целевой функции в задаче максимизации не превосходят значений целевой функции в двойственной задаче минимизации.

Предположим, что в каждой из этих задач существуют допустимые векторы $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$. Допустимое множество прямой задачи содержит вектор $\mathbf{x}^0$ и, следовательно, непусто. Целевая функция в прямой задаче ограничена, так как для любого допустимого вектора $\mathbf{x}$

$$F(\mathbf{x}) \leqslant G(\mathbf{y}^0). \qquad (5.2.12)$$

Следовательно, прямая задача имеет решение. Так как при любом допустимом векторе $\mathbf{y}$

$$F(\mathbf{x}^0) \leqslant G(\mathbf{y}), \qquad (5.2.13)$$

то целевая функция в двойственной задаче ограничена снизу. А так как допустимое множество в этой задаче содержит вектор, то и двойственная задача имеет решение.

Покажем теперь, что если решение задачи линейного программирования существует, то допустимые множества как прямой, так и двойственной задач непусты.

Пусть $\mathbf{x}^*$ является решением задачи максимизации. Тогда очевидно, что прямая задача имеет хотя бы один допустимый вектор, а именно вектор $\mathbf{x}^*$. Известно, что целевая функция вогнута, а функции ограничений выпуклы (линейная функция является одновременно и выпуклой и вогнутой) и что выполняются условия регулярности ограничений. Поэтому если $\mathbf{x}^*$ является решением задачи максимизации, то, согласно теореме Куна — Таккера (см. раздел 4.3), существует вектор $\mathbf{y}^*$, удовлетворяющий условиям (5.2.3). Следовательно,

$$\mathbf{y}^*\mathbf{A} \geqslant \mathbf{c}, \quad \mathbf{y}^* \geqslant 0, \qquad (5.2.14)$$

так что $\mathbf{y}^*$ есть допустимый вектор. Теорема доказана.

Итак, решение существует тогда, и только тогда, когда каждая из двойственных задач имеет допустимые векторы. Если допустимое множество одной из задач пусто, то тогда либо допустимое множество двойственной задачи пусто, либо ее целевая функция не ограничена. Вообще любые две двойственные задачи либо имеют допустимые векторы и, следовательно, по теореме существования обладают решениями, либо лишь одна из двойственных задач имеет допустимый вектор, причем ее целевая функция не ограничена, либо ни одна из двойственных задач не имеет допустимых векторов. Эти три случая представлены на рис. 5.4.

Вторая основная теорема линейного программирования — это теорема двойственности: некоторый допусти-



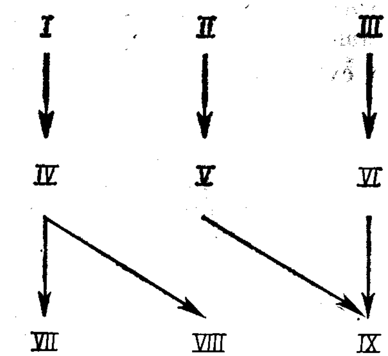


**Рис. 5.4.** Альтернативные варианты, возникающие при решении задач линейного программирования.

I — Существуют допустимые векторы и для прямой и для двойственной задачи.
II — Допустимый вектор существует в прямой задаче; двойственная задача не обладает допустимым вектором.
III — Ни прямая, ни двойственная задача не имеют допустимых векторов.
IV — Существует решение прямой задачи.
V — Целевая функция прямой задачи неограничена.
VI — Допустимое множество прямой задачи пусто.
VII — Единственное решение.
VIII — Не единственное решение.
IX — Нет решений.

мый вектор тогда, и только тогда, является решением задачи линейного программирования, когда существует такой допустимый вектор двойственной задачи, что значения целевых функций обеих задач на этих векторах равны.

Докажем сначала, что если $\mathbf{x}^*$ — решение задачи максимизации, то существует $\mathbf{y}^*$ — допустимый вектор двойственной задачи, такой, что значения целевых функций на этих векторах равны. Рассмотрим условия Куна — Таккера (5.2.3). Если вектор $\mathbf{y}^*$ удовлетворяет этим условиям, то, согласно (5.2.14),

$$\mathbf{y}^*\mathbf{A} \geqslant \mathbf{c}, \quad \mathbf{y}^* \geqslant 0, \qquad (5.2.15)$$

т. е. этот вектор будет допустимым. Кроме того, из

$$\begin{aligned} (\mathbf{c} - \mathbf{y}^*\mathbf{A})\,\mathbf{x}^* &= 0 \\ \mathbf{y}^*(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) &= 0 \end{aligned} \qquad (5.2.16)$$

следует, что

$$F(\mathbf{x}^*) = \mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b} = G(\mathbf{y}^*), \qquad (5.2.17)$$

т. е. значения целевых функций совпадают. Для того чтобы доказать эту часть теоремы в случае, когда прямой задачей является задача минимизации, достаточно провести аналогичные рассуждения, используя условия (5.2.6).

Покажем теперь, что если существуют такие допустимые векторы $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$, в которых значения целевых функций совпадают, т. е.

$$F(\mathbf{x}^*) = \mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b} = G(\mathbf{y}^*), \qquad (5.2.18)$$

то эти векторы являются решениями соответствующих двойственных задач. Так как $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — допустимые векторы, то из (5.2.11) следует, что

$$F(\mathbf{x}) \leqslant G(\mathbf{y}), \qquad (5.2.19)$$

а поскольку $\mathbf{y}^*$ — допустимый вектор, то

$$F(\mathbf{x}) < G(\mathbf{y}^*). \qquad (5.2.20)$$

Следовательно, при всех допустимых $\mathbf{x}$

$$F(\mathbf{x}) \leqslant F(\mathbf{x}^*) \qquad (5.2.21)$$

(см. 5.2.18), а это означает, что $\mathbf{x}^*$ представляет собой решение задачи максимизации.

Аналогично при всех допустимых $\mathbf{y}$

$$G(\mathbf{y}^*) \leqslant G(\mathbf{y}). \qquad (5.2.22)$$

Теорема доказана. Итак, допустимый вектор $\mathbf{x}^*$ является решением задачи максимизации тогда, и только тогда, когда существует такой допустимый вектор $\mathbf{y}^*$ для двойственной задачи, при котором выполняется равенство (5.2.18). В частности,

$$F(\mathbf{x}) \leqslant F(\mathbf{x}^*) = G(\mathbf{y}^*) \leqslant G(\mathbf{y}). \qquad (5.2.23)$$

Поскольку $F$ не превосходит $G$, то, решая задачу максимизации функции $F$ относительно $\mathbf{x}$ и задачу минимизации функции $G$ относительно $\mathbf{y}$, мы повышаем уровень значений $F$ и снижаем уровень значений $G$ до тех пор, пока они не станут равными в точке решения.



Третьей основной теоремой линейного программирования является теорема о дополняющей нежесткости[1]: для того чтобы допустимые векторы $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ являлись решениями двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли условиям дополняющей нежесткости, т. е.

$$\begin{aligned} (\mathbf{c} - \mathbf{y}^*\mathbf{A})\,\mathbf{x}^* &= 0 \\ \mathbf{y}^*(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) &= 0. \end{aligned} \qquad (5.2.24)$$

Необходимость следует непосредственно из условий Куна — Таккера. Достаточность следует из теоремы двойственности. Действительно, предположим, что $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ — допустимые векторы. Тогда из условий дополняющей нежесткости вытекает, что

$$F(\mathbf{x}^*) = \mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b} = G(\mathbf{y}^*). \qquad (5.2.25)$$

Следовательно, $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ являются искомыми решениями.

Выпишем условия дополняющей нежесткости в развернутом виде. Они приводят к равенствам:

$$\begin{aligned} \Big(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^*\Big)x_j^* &= 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ y_i^*\Big(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*\Big) &= 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \qquad (5.2.26)$$

Сопоставив эти выражения с ограничениями в прямой и в двойственной задачах, получим:

$$\left.\begin{aligned} &x_j^* \geqslant 0, \text{ но } x_j^* = 0, \text{ если } \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* > c_j \\ &\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* \geqslant c_j, \text{ но } \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* = c_j, \text{ если } x_j^* > 0 \end{aligned}\right\} j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\left.\begin{aligned} &y_i^* \geqslant 0, \text{ но } y_i^* = 0, \text{ если } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* \leqslant b_i, \text{ но } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i, \text{ если } y_i^* > 0 \end{aligned}\right\} i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (5.2.27)$$

[1] В советской литературе по линейному программированию указанную теорему обычно называют второй теоремой двойственности. — *Прим. перев.*

Следовательно, если в оптимальной точке некоторое ограничение выполняется как строгое неравенство, то соответствующая двойственная переменная равна нулю, а если в этой точке некоторая переменная принимает положительное значение, то соответствующее ограничение-неравенство в двойственной задаче выполняется как равенство. Из решения двойственной задачи видно, какие переменные прямой задачи обращаются в оптимальной точке в нуль и какие из ограничений-неравенств в этой точке выполняются как равенства.

Используя вспомогательные переменные, можно, как и в предыдущей главе, дать геометрическую интерпретацию решений двойственных задач. По теореме о дополняющей нежесткости векторы $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ являются решениями двойственных задач максимизации и минимизации тогда, и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}^* \leqslant \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}^* \geqslant 0, \quad \mathbf{y}^* (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) = 0 \\ \mathbf{y}^*\mathbf{A} \geqslant \mathbf{c}, \quad \mathbf{y}^* \geqslant 0, \quad (\mathbf{c} - \mathbf{y}^*\mathbf{A})\, \mathbf{x}^* = 0. \end{aligned} \qquad (5.2.28)$$

Введем в задаче максимизации вектор-столбец вспомогательных переменных $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_m)'$, а в задаче минимизации — вектор-строку $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Теперь условия (5.2.28) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{s}^* = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}^* \geqslant 0, \quad \mathbf{s}^* \geqslant 0, \quad \mathbf{y}^*\mathbf{s}^* = 0 \\ \mathbf{y}^*\mathbf{A} = \mathbf{c} + \mathbf{r}^*, \quad \mathbf{y}^* \geqslant 0, \quad \mathbf{r}^* \geqslant 0, \quad \mathbf{r}^*\mathbf{x}^* = 0. \end{aligned} \qquad (5.2.29)$$

Здесь неотрицательность вспомогательных переменных обеспечивает выполнение ограничений-неравенств в обеих задачах, а обращение в нуль суммы произведений вспомогательных переменных и двойственных переменных обеспечивает выполнение условий дополняющей нежесткости. Рассмотрим теперь геометрическую интерпретацию условий (5.2.29). Условия, что вектор $\mathbf{y}^*$ является допустимым в задаче минимизации, можно представить в виде

$$\mathbf{c} = \mathbf{y}^* \mathbf{A} + \mathbf{r}^* (-\mathbf{I}), \quad \mathbf{y}^* \geqslant 0, \quad \mathbf{r}^* \geqslant 0, \qquad (5.2.30)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Эти условия показывают, что вектор $\mathbf{c}$ представляет собой линейную комбинацию строк матрицы коэффициентов и единичной матрицы, умноженной на — 1. Однако **вектор c является градиентом целевой функции в задаче**



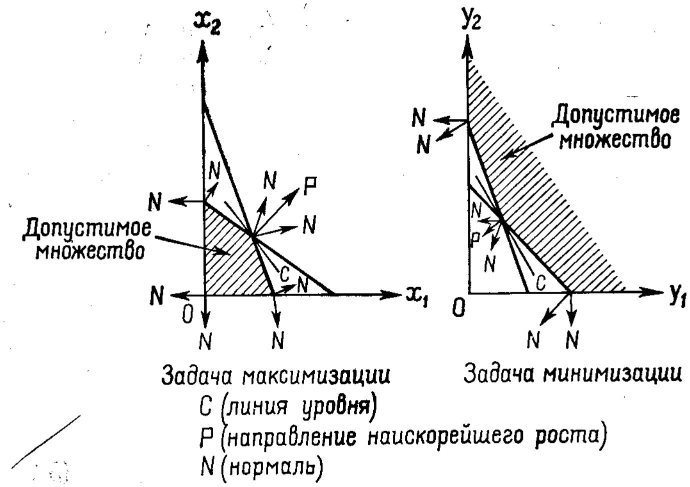


**Рис. 5.5. Геометрическое изображение двойственных задач при** $m = n = 2$.

максимизации, и, следовательно, он определяет направление наискорейшего роста функции. Строки матрицы коэффициентов и строки единичной матрицы, умноженной на —1, представляют собой соответственно векторы градиентов функций, входящих в ограничения-неравенства и в ограничения неотрицательности. Таким образом, строки этих матриц определяют координаты векторов, нормальных к граничным поверхностям допустимого множества. Запишем условия того, что вектор $\mathbf{x}^*$ является допустимым в задаче максимизации, в следующем виде:

$$-\mathbf{b} = (-\mathbf{A})\, \mathbf{x}^* + (-\mathbf{I})\, \mathbf{s}^*, \quad \mathbf{x}^* \geqslant 0, \quad \mathbf{s}^* \geqslant 0. \qquad (5.2.31)$$

Отсюда видно, что направление наискорейшего роста в задаче минимизации (т. е. направление градиента функции $G(\mathbf{y})$, взятого со знаком минус) представляет собой неотрицательную линейную комбинацию нормалей, направленных прочь от допустимого множества. Последние представляют собой столбцы матрицы коэффициентов и столбцы единичной матрицы, взятые со знаком минус. Выражения (5.2.30) и (5.2.31) показывают, что в оптимальной точке каждой из задач направление наискорейшего роста должно находиться между нормалями, направленными прочь от допустимого множества. На рис. 5.5 **этот вывод проиллюстрирован на примере двойственных** задач, в которых $m = n = 2$. В каждой из этих задач направление наискорейшего роста $P$ расположено между нормалями, направленными прочь от допустимого множества.

Укажем, каков геометрический смысл остальных условий из (5.2.29), т. е. условий дополняющей нежесткости

$$\mathbf{y}^*\mathbf{s}^* = 0, \quad \mathbf{r}^*\mathbf{x}^* = 0. \tag{5.2.32}$$

Взвешивающий коэффициент нормали к некоторому ограничению-неравенству (или ограничению неотрицательности) в линейных комбинациях (5.2.30) или (5.2.31) равен нулю, если взвешивающий коэффициент нормали к соответствующему ограничению неотрицательности (ограничению-неравенству) двойственной задачи положителен, т. е.

$$\begin{aligned} y_i^* &= 0, \text{ если } s_i^* > 0; \quad x_j^* = 0, \text{ если } r_j^* > 0 \\ r_i^* &= 0, \text{ если } x_i^* > 0; \quad s_j^* = 0, \text{ если } y_j^* > 0, \end{aligned} \tag{5.2.33}$$

где

$$i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

## 5.3. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДВОЙСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Так как переменные в двойственной задаче являются множителями Лагранжа, то, как и в разделе 4.4, их можно считать показателями чувствительности оптимального значения целевой функции к изменениям констант ограничений. Такая интерпретация двойственных переменных непосредственно следует из результатов предыдущего параграфа.

Предположим, что в точке оптимума задачи максимизации (5.1.1) $m_1$ ограничений-неравенств выполняются как равенства, а остальные $m - m_1$ ограничений выполняются как строгие неравенства, в то время как в двойственной задаче минимизации $n_1$ ограничений-неравенств выполняются как равенства, а остальные $n - n_1$ — как строгие неравенства. В этом случае ограничения-неравенства всегда можно перенумеровать заново таким образом, чтобы первые $m_1$ ограничений в задаче максимизации и первые $n_1$ ограничений в задаче минимизации выполнялись как равенства, при этом переменные в двойственной задаче также должны быть перенумерованы соответствующим образом. После этого матрицу коэффициентов и векторы параметров можно расчленить следующим образом:

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}^1 \ \ \mathbf{c}^2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{11} & \mathbf{A}^{12} \\ \mathbf{A}^{21} & \mathbf{A}^{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \end{pmatrix}, \tag{5.3.1}$$

где $\mathbf{c}^1$ содержит $n_1$ элементов, $\mathbf{b}^1$ — $m_1$ элементов, а матрица $\mathbf{A}^{11}$ состоит из $m_1 n_1$ элементов. Аналогично этому можно расчленить и векторы переменных

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = (\mathbf{y}^1 \ \ \mathbf{y}^2), \tag{5.3.2}$$

где $\mathbf{x}^1$ содержит $n_1$ элементов, а $\mathbf{y}^1$ содержит $m_1$ элементов. Согласно сделанным предположениям, в оптимальных точках $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ двойственных задач выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{11}\mathbf{x}^{1*} + \mathbf{A}^{12}\mathbf{x}^{2*} &= \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{A}^{21}\mathbf{x}^{1*} + \mathbf{A}^{22}\mathbf{x}^{2*} &< \mathbf{b}^2 \\ \mathbf{y}^{1*}\mathbf{A}^{11} + \mathbf{y}^{2*}\mathbf{A}^{21} &= \mathbf{c}^1 \\ \mathbf{y}^{1*}\mathbf{A}^{12} + \mathbf{y}^{2*}\mathbf{A}^{22} &> \mathbf{c}^2. \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

В то же время, согласно свойствам исходных и вспомогательных переменных, полученным в предыдущем разделе (дополняющая нежесткость),

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{1*} \geqslant 0, \quad \mathbf{x}^{2*} = 0 \\ \mathbf{y}^{1*} \geqslant 0, \quad \mathbf{y}^{2*} = 0. \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Следовательно, равенства (5.3.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{11}\mathbf{x}^{1*} &= \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{y}^{1*}\mathbf{A}^{11} &= \mathbf{c}^1. \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Если матрица $\mathbf{A}^{11}$ является невырожденной квадратной матрицей, то каждая из двойственных задач будет иметь единственное решение (в вершине допустимого множества). Эти решения можно записать в явном виде, используя $m_1 n_1 + m_1 + n_1$ параметров, входящих в $\mathbf{A}^{11}$, $\mathbf{b}^1$ и $\mathbf{c}^1$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{1*} &= (\mathbf{A}^{11})^{-1}\,\mathbf{b}^1, \quad \mathbf{x}^{2*} = \mathbf{0} \\ \mathbf{y}^{1*} &= \mathbf{c}^1\,(\mathbf{A}^{11})^{-1}, \quad \mathbf{y}^{2*} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Соответствующие оптимальные значения целевых функций совпадают по теореме двойственности и могут быть представлены в виде функций от тех же $m_1 n_1 + m_1 + n_1$ параметров

$$F(\mathbf{x}^*) = \mathbf{c}^1 \mathbf{x}^{1*} = \mathbf{c}^1 (\mathbf{A}^{11})^{-1} \mathbf{b}^1 = \mathbf{y}^{1*} \mathbf{b}^1 = G(\mathbf{y}^*). \quad (5.3.7)$$

Проанализируем теперь, как изменения этих параметров влияют на решения (5.3.6) и на оптимальное значение $F^* = F(\mathbf{x}^*)$:

$$\frac{\partial F^*}{\partial \mathbf{b}^1} = \mathbf{c}^1 (\mathbf{A}^{11})^{-1} = \mathbf{y}^{1*}; \quad \frac{\partial F^*}{\partial \mathbf{b}^2} = 0. \quad (5.3.8)$$

Следовательно,

$$\mathbf{y}^* = \frac{\partial F^*}{\partial \mathbf{b}}. \quad (5.3.9)$$

Точно так же в двойственной задаче

$$\frac{\partial G^*}{\partial \mathbf{c}^1} = (\mathbf{A}^{11})^{-1} \mathbf{b}^1 = \mathbf{x}^1; \quad \frac{\partial G}{\partial \mathbf{c}^2} = 0. \quad (5.3.10)$$

Следовательно,

$$\mathbf{x}^* = \frac{\partial G^*}{\partial \mathbf{c}}. \quad (5.3.11)$$

Таким образом, чувствительность оптимального значения целевой функции к изменениям некоторой константы ограничений измеряется значением, которое принимает в оптимальной точке соответствующая переменная двойственной задачи. Такая трактовка двойственных переменных тождественна их интерпретации в более общем случае задачи нелинейного программирования, данной в разделе 4.4. Как уже отмечалось в разделе 3.3, в некоторых экономических задачах распределения ресурсов двойственные переменные естественно рассматривать как «вмененные цены», поскольку они выражают изменение некоторого экономического показателя, имеющего денежную оценку (например, прибыли, выручки или затрат), вызванное изменением некоторой хозяйственной величины, измеряемой в натуральных единицах. Такие цены называют теневыми ценами [1].

Если некоторая двойственная переменная равна нулю, то оптимальное значение целевой функции не зависит от соответствующей константы ограничений. Этот вывод доста-

[1] В советской литературе теневые цены называют также условными оценками, или объективно обусловленными оценками. — *Прим. перев.*



точно очевиден, так как если ограничение является нежестким, то малые изменения константы ограничения не отразятся на решении задачи. Действительно, из (5.3.6) следует, что

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{x}^{1*}}{\partial \mathbf{b}^2} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{x}^{2*}}{\partial \mathbf{b}^2} = 0 \\ &\frac{\partial \mathbf{y}^{1*}}{\partial \mathbf{c}^2} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{y}^{2*}}{\partial \mathbf{c}^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Если в задачах распределения ресурсов некоторое ограничение является нежестким, то это обычно означает, что спрос строго меньше предложения, в результате чего теневые цены (условные оценки) равны нулю. В этом случае решение не зависит от общего объема возможного предложения данного товара, так как имеющееся количество этого товара превышает ту потребность в нем, которая соответствует его использованию в оптимальной точке.

Если ограничение является жестким, то характеристики чувствительности решения к изменениям констант ограничений можно также получить, дифференцируя (5.3.6):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{x}^{1*}}{\partial \mathbf{b}^1} = (\mathbf{A}^{11})^{-1} \\ &\frac{\partial \mathbf{y}^{1*}}{\partial \mathbf{c}^1} = (\mathbf{A}^{11})^{-1}. \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Следовательно, соответствующие элементы этих матриц равны. Величины

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{c}^1} = (\mathbf{A}^{11})^{-1} \mathbf{b}^1 = \mathbf{x}^{1*} \\ &\frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial \mathbf{b}^1} = \mathbf{c}^1 (\mathbf{A}^{11})^{-1} = \mathbf{y}^{1*} \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

являются характеристиками чувствительности оптимальных значений целевых функций к изменениям констант ограничений.

В заключение исследуем влияние изменений матрицы коэффициентов. Очевидно, что элементы матрицы $\mathbf{A}$, не входящие в число элементов подматрицы $\mathbf{A}^{11}$, не влияют на решение или на оптимальное значение. Дифференцируя (5.3.7), можно установить, какое влияние на оптимальное значение оказывает изменение элементов $\mathbf{A}^{11}$

$$\frac{\partial F^*}{\partial \mathbf{A}^{11}} = -(\mathbf{A}^{11})^{-1}\,\mathbf{b}^1\mathbf{c}^1\,(\mathbf{A}^{11})^{-1} = \frac{\partial G^*}{\partial \mathbf{A}^{11}}. \qquad (5.3.15)$$

Здесь матрица **A** представляет собой матрицу размерности $m_1 \times m_1$. Используя (5.3.6), получаем

$$\frac{\partial F^*}{\partial \mathbf{A}^{11}} = -\mathbf{x}^{1*}\mathbf{y}^{1*} = \frac{\partial G^*}{\partial \mathbf{A}^{11}}. \qquad (5.3.16)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F^*}{\partial a_{ij}} = -x_j^* y_i^* = \frac{\partial G^*}{\partial a_{ij}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1; \quad j = 1, 2, \ldots, n_1. \qquad (5.3.17)$$

## 5.4. СИМПЛЕКС-МЕТОД

Задачи линейного программирования, в которых число переменных или число ограничений-неравенств равно двум или трем, можно решать графически.

Для того чтобы решить графическим способом задачу линейного программирования в случае, когда число переменных $n$ равно двум или трем, следует изобразить на схеме линии уровня, направления наискорейшего роста и допустимое множество. Затем по чертежу определяется точка (или точки), где линия (поверхность) наибольшего уровня касается допустимого множества. Если число ограничений-неравенств $m$ равно двум или трем, то сначала решаем графически двойственную задачу. Затем, зная уже оптимальное значение целевой функции и зная, какие ограничения-неравенства выполняются как равенства, можно найти решение прямой задачи.

*Симплексный алгоритм* представляет собой алгебраический метод, позволяющий найти решение задач линейного программирования с помощью итеративной процедуры [1]. По терминологии раздела 4.5 этот метод относится к алгоритмам, в которых выбор начальной точки осуществляется с учетом ограничений. В качестве первого приближения можно брать любую вершину допустимого множества (предполагается, что допустимое множество непусто). Затем следует взять любую соседнюю вершину по такому направлению, в котором целевая функция возрастает, а затем новую вершину и т. д. Процесс заканчивается после того, как найдена такая вершина, что при перемещении в любую соседнюю вершину целевая функция не возрастает. Найденная вершина является точкой глобального оптимума. Если перемещение в любую соседнюю вершину уменьшает целевую функцию, то найденное решение единственно. Если же смещение в некоторую другую вершину не уменьшает целевую функцию, то решение не единственно и все такие вершины (а также все точки, лежащие между ними) являются решениями. Так как число вершин допустимого множества конечно, то симплекс-метод либо приведет к решению задачи, либо через конечное число шагов покажет, что целевая функция не ограничена [1].

Для того чтобы понять, как решать задачи с помощью симплекс-метода, лучше всего разобрать какой-нибудь простой пример. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования: найти

$$\max_{x_1, x_2} F = 3x_1 + 2x_2$$

при условии, что

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 8 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.1)$$

Эта задача, конечно, чрезвычайно простая, и ее можно решить графическим способом, однако она весьма удобна в качестве иллюстрации самого принципа, на котором основан данный алгоритм.

Первым шагом при решении задачи с помощью симплекс-метода является введение вспомогательных перемен-

[1] См. библиографию в прим. на стр. 122. Симплекс-метод впервые был сформулирован в работе Данцига [12]. На этом методе или на его модификациях основаны существующие в настоящее время программы для электронно-вычислительных машин, позволяющие решать задачи линейного программирования с числом ограничений до нескольких тысяч. Само понятие «симплекс-метод» возникло в результате ранних исследований, когда рассматривалась задача оптимизации на симплексе, то есть на множестве такого вида: $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$, $x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

[1] Обычно при решении с помощью симплекс-метода не нужно исследовать каждую вершину допустимого множества. Число таких вершин даже в задачах небольшой размерности может быть чрезвычайно велико.

ных с целью превратить неравенства в равенства. Вводя две новые неотрицательные переменные $s_1$ и $s_2$, преобразуем ограничения к виду

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + s_1 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 8 \qquad (5.4.2) \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ s_1 &\geqslant 0,\ s_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

На втором шаге определим *допустимое базисное решение*, т. е. некоторую вершину допустимого множества. Для простоты в качестве такой вершины часто берут начало координат, если оно принадлежит допустимому множеству [1]. Так как в данной задаче точка начала координат в $E^2$ принадлежит допустимому множеству, то примем ее за допустимое базисное решение. В этой точке

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ s_1 = 6,\ s_2 = 8;\ F = 0. \qquad (5.4.3)$$

Третий шаг. Запишем систему ограничений и целевую функцию задачи относительно тех переменных, которые равны нулю в точке решения. Указанные переменные называются небазисными переменными. Так как в нашем допустимом базисном решении небазисными переменными являются $x_1$ и $x_2$, то ограничения и целевая функция имеют вид

$$\begin{aligned} s_1 &= 6 - 2x_1 - x_2 \\ s_2 &= 8 - x_1 - 2x_2 \qquad (5.4.4) \\ F &= 3x_1 + 2x_2. \end{aligned}$$

Четвертый шаг — переход к некоторой соседней вершине. Для каждой из небазисных переменных в отдельности определим, насколько можно увеличить эту переменную (при соблюдении ограничений) и насколько при этом возрастет целевая функция. Уравнения (5.4.4) показывают, что небазисные переменные могут возрастать, пока $s_1$ и $s_2$ остаются неотрицательными.

---

[1] Если начало координат не является допустимой точкой, то допустимое базисное решение можно получить с помощью *метода искусственных переменных*: в каждой из левых частей ограничений равенств вводится новая (искусственная) переменная и затем минимизируется сумма этих искусственных переменных. Если минимум этой суммы равен нулю, то соответствующая точка является допустимым базисным решением.



Так как первое ограничение выполняется, пока $x_1$ не превосходит 3, а второе — пока $x_1$ не превосходит 8, то максимально возможное увеличение $x_1$, удовлетворяющее обоим ограничениям, равно 3. Целевая функция при этом возрастает на 9. Максимально возможное увеличение $x_2$ равно 4, при этом целевая функция возрастает на 8. При перемещении в направлении наибольшего роста целевой функции $x_1$ увеличивается на 3, при этом $s_1$ становится равной нулю, а $s_2$ равно 5. Следовательно, небазисной переменной вместо $x_1$ становится $s_1$. (Можно было бы передвинуться и в точку, где $x_2 = 4$, $s_2 = 0$, так как при этом целевая функция также возрастает. При выборе направления перемещения вовсе не обязательно брать направление наибольшего роста целевой функции — достаточно выбрать любое направление роста.) Получено новое допустимое базисное решение

$$x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ s_1 = 0,\ s_2 = 5;\ F = 9, \qquad (5.4.5)$$

где $x_2$ и $s_1$ — небазисные переменные.

Преобразование, сделанное на этом этапе, называется *ведущим преобразованием*. Оно является основным преобразованием при вычислениях по симплекс-методу. С помощью этого преобразования определяются новые базисные переменные, а целевая функция становится при этом линейной функцией небазисных переменных.

Воспользуемся при дальнейшем изложении системой обозначений, приведенной на рис. 5.3. Любое ведущее преобразование, осуществляемое относительно некоторого ненулевого элемента $a_{ij}$, состоит из двух шагов. Первый шаг состоит в нормировании всех элементов ведущей строки $i$, для чего все элементы строки делятся на ведущий элемент $a_{ij}$. Второй шаг: из всех строк вычитается ведущая строка, умноженная на подходящие множители, с тем чтобы сделать нулевыми все элементы ведущего столбца $j$, кроме самого ведущего элемента. Таким образом, осуществление ведущего преобразования относительно $a_{ij}$ дает тот же результат, что и решение i-го уравнения относительно $x_j$ с последующим использованием этого уравнения для исключения переменной $x_j$ из всех остальных уравнений.

Запишем исходную таблицу рассматриваемого примера (см. рис. 5.6). Возьмем в качестве ведущего элемента тот элемент, который отмечен кружком. Осуществив ведущее преобразование относительно этого элемента, получим таблицу на рис. 5.7, в последнем столбце которой стоят значения базисных переменных. (Мы пока что не будем обращать внимания на то обстоятельство, что элемент, стоящий на пересечении второй строки и второго столбца, обведен кружком.) В общем случае ведущий элемент должен быть таким ненулевым элементом $a_{ij}$ (в данном случае $a_{ij} = 2$), которому в последней строке соответствует положительный элемент $c_j$ (здесь $c_j = 3$), и, кроме

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 0 | 6 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 8 |
| 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |

Рис. 5.6.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 3 |
| 0 | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 5 |
| 0 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | 0 | $-\frac{3}{2}$ |

Рис. 5.7.

того, элемент $a_{ij}$ должен быть таким, чтобы в последнем столбце преобразованной таблицы не было неотрицательных чисел (указанные числа равны 3 и 5).

Следующий этап решения нашего примера состоит в том, что повторяется третий шаг симплекс-метода: ограничения и целевая функция выражаются через небазисные переменные

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}s_1\\
s_2 &= 8 - \left(3 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}s_1\right) - 2x_2 = 5 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}s_1 \qquad (5.4.6)\\
F &= 3\left(3 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}s_1\right) + 2x_2 = 9 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}s_1.
\end{aligned}
$$

Отметим, что коэффициенты этих уравнений совпадают с элементами соответствующих строк преобразованной таблицы, приведенной выше.

Повторим теперь четвертый шаг симплекс-метода. При этом $x_2$ может возрасти не более чем на $\frac{10}{3}$ (так как при дальнейшем увеличении $x_2$ переменная $s_2$ становится отрицательной), что соответствует увеличению $F$ на $\frac{10}{6}$



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{3}$ |
| 0 | 1 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{10}{3}$ |
| 0 | 0 | $-\frac{4}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{19}{6}$ |

Рис. 5.8.

(рост значений другой небазисной переменной приводит лишь к уменьшению целевой функции). Следовательно, новое допустимое базисное решение таково:

$$x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{10}{3}, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0; \quad F = \frac{32}{3}. \qquad (5.4.7)$$

Здесь новыми небазисными переменными являются $s_1$ и $s_2$. Ведущее преобразование относительно отмеченного кружком элемента предшествующей таблицы приводит к получению таблицы, изображенной на рис. 5.8.

Эта таблица позволяет построить уравнения, к которым нужно вновь применить действия, предусмотренные третьим шагом симплекс-метода. В результате приходим к уравнениям

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{4}{3} - \frac{2}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2\\
x_2 &= \frac{10}{3} + \frac{1}{3}s_1 + \frac{2}{3}s_2 \qquad (5.4.8)\\
F &= \frac{32}{3} - \frac{4}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_2.
\end{aligned}
$$

Отсюда видно, что последнее допустимое базисное решение является на самом деле решением задачи, так как коэффициенты при всех переменных в целевой функции отрицательные и, следовательно, при увеличении любой небазисной переменной целевая функция может только уменьшиться. Этот вывод ясен и из рассмотрения последней таблицы, так как все коэффициенты целевой функции в ней либо отрицательны, либо равны нулю. Эта таблица является оптимальной, так как все элементы ее последней строки неположительны, а все элементы последнего столбца неотрицательны. Элементы последнего столбца являются решением прямой задачи. Следовательно, в результате применения симплекс-метода получено следующее решение:

$$x_1^* = \frac{4}{3}, \quad x_2^* = \frac{10}{3} \qquad (5.4.9)$$
$$F^* = \frac{32}{3}.$$

Коэффициенты при вспомогательных переменных в последнем выражении для целевой функции, являющиеся ненулевыми элементами последней строки таблицы, представляют собой оптимальные значения двойственных переменных, взятые с обратным знаком. Действительно, с помощью этих величин измеряют скорость, с которой может происходить рост целевой функции в том случае, если бы $s_1$ и $s_2$ стали отрицательными, т. е. если бы увеличились коэффициенты $b_1$ и $b_2$. Таким образом, решение двойственной задачи найти

$$\min_{y_1, y_2} G = 6y_1 + 8y_2$$

при условии, что

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 &\geqslant 3 \\ y_1 + 2y_2 &\geqslant 2 \\ y_1 \geqslant 0,\ y_2 &\geqslant 0, \end{aligned} \qquad (5.4.10)$$

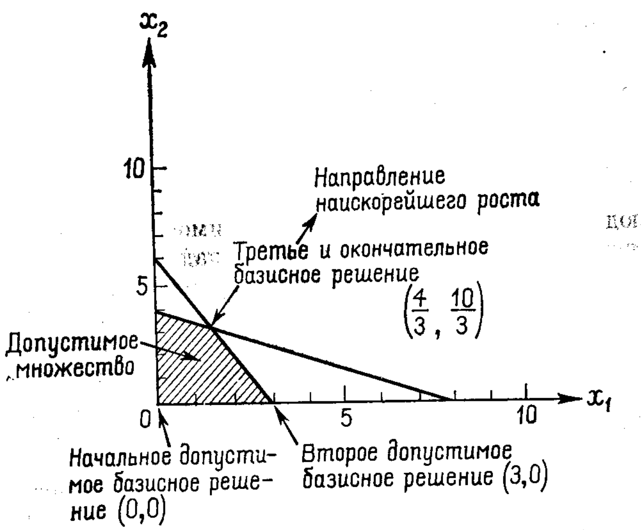


**Рис. 5.9.** Иллюстрация симплекс-метода.

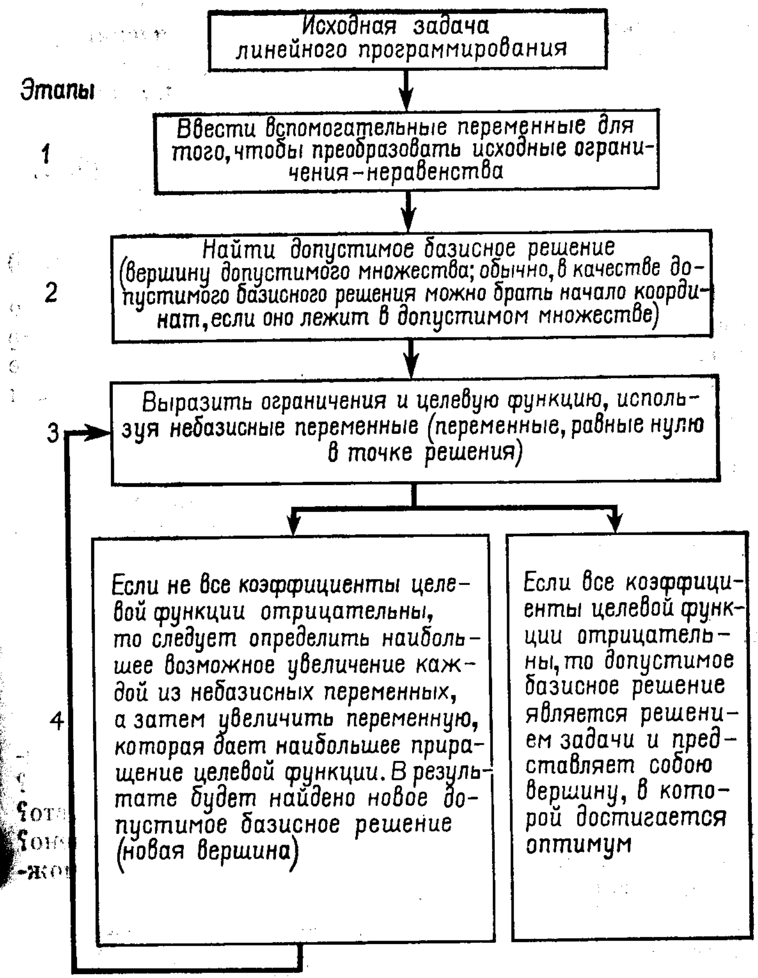


**Рис. 5.10.** Основные этапы решения задачи с помощью симплекс—метода.

имеет следующий вид:

$$y_1^* = \frac{4}{3}, \quad y_2^* = \frac{1}{3} \qquad (5.4.11)$$
$$G^* = \frac{32}{3}.$$

Оптимальные значения двойственных переменных измеряют чувствительность оптимального значения целевой функции $F^*$ к изменениям констант ограничений. Так, например, если бы константа в первом ограничении прямой задачи изменилась с 6 до 8, то оптимальное значение целевой функции увеличилось бы на

$$\Delta F^* = y_1^* \Delta b = \frac{4}{3}(8-6) = \frac{8}{3} \qquad (5.4.12)$$

и новое оптимальное значение стало бы равным

$$\frac{32}{3} + \frac{8}{3} = \frac{40}{3}. \qquad (5.4.13)$$

На рис. 5.9 дана иллюстрация к решению с помощью симплекс-метода: показано, как происходит перемещение от вершины к вершине при поиске решения. Основные этапы решения с помощью симплекс-метода приведены в диаграмме на рис. 5.10.

## ЗАДАЧИ

5-А. Рассмотрите задачу линейного программирования, зависящую от двух параметров $p$ и $q$: найти

$$\max_{x_1, x_2} F(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

при условии, что

$$-x_1 - x_2 \leqslant -p, \quad qx_1 + x_2 \leqslant 10, \qquad x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0.$$

1. Сформулируйте двойственную задачу.
2. При каких значениях $p$ и $q$ существует единственное решение? При каких $p$ и $q$ решение не единственно?
3. При каких $p$ и $q$ допустимое множество пусто? При каких $p$ и $q$ допустимое множество не ограничено?

5-Б. На рис. 5.11 представлено 4 логически возможных вида задач линейного программирования.

| | | Допустимое множество прямой задачи: Непустое | Допустимое множество прямой задачи: Пустое |
|---|---|---|---|
| Допустимое множество двойственной задачи | Непустое | 1 | 2 |
| | Пустое | 3 | 4 |

Рис. 5.11.

Приведите примеры задач каждого из этих четырех видов.

5-В. Рассмотрите задачу: найти

$$\max_{x_1, x_2} F = x_1 + 2x_2$$

при условии, что

$$x_1 + x_2 \leqslant 10$$
$$-2x_1 + x_2 \leqslant 4$$
$$x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0.$$

1. Решите эту задачу и двойственную к ней; проиллюстрируйте решение графически.
2. Первое ограничение заменено неравенством

$$x_1 + x_2 \leqslant 11.$$

Решите прямую задачу и дайте графическую иллюстрацию решения. Покажите, как связаны изменения оптимального значения $F^*$ и оптимальное значение двойственной переменной.

3. Вместо исходной целевой функции введена функция

$$F = 2x_1 + 2x_2.$$

Решите прямую задачу и дайте графическую иллюстрацию решения. Покажите, как связаны изменения в $F^*$ и величина $x_1^*$.

4. Второе ограничение заменено неравенством

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 10.$$

Решите прямую задачу и дайте графическую иллюстрацию решения. Покажите, как связаны изменения в $F^*$ с $x_1^*$ и с оптимальным значением второй двойственной переменной.

5-Г. Дана задача линейного программирования: найти

$$\min_{y_1, y_2, y_3, y_4} \quad G = 6y_1 + 20y_2 + 3y_3 + 20y_4$$

при условии, что

$$3y_1 + 6y_2 - y_3 + 2y_4 \geqslant 4$$
$$-4y_1 + 2y_2 + y_3 + 5y_4 \geqslant 2$$
$$y_1 \geqslant 0, \ y_2 \geqslant 0, \ y_3 \geqslant 0, \ y_4 \geqslant 0.$$

Найти решение этой задачи, решив сначала двойственную задачу.

5-Д. Покажите, что если векторы $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ являются решением системы линейных неравенств

$$\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geqslant 0$$
$$\mathbf{yA} \geqslant \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geqslant 0$$
$$\mathbf{yb} \leqslant \mathbf{cx},$$

то они будут соответственно решениями прямой и двойственной задач.

5-Е. В симметрической задаче линейного программирования найти

$$\max \mathbf{b}'\mathbf{x}$$

при условии, что $\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geqslant 0$,

где $\mathbf{A}$ — симметрическая матрица ($m = n$); доказать, если существует такой неотрицательный вектор $\mathbf{x}^*$, что $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$, то $\mathbf{x}^*$ является решением задачи.

5-Ж. Система линейных неравенств

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{A}' & 0 & \mathbf{c}' \\ \mathbf{b}' & -\mathbf{c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}' \\ \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} \leqslant 0 \quad \begin{pmatrix} \mathbf{y}' \\ \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} \geqslant 0$$

имеет кососимметрическую матрицу. Докажите теорему двойственности, используя свойства систем линейных однородных неравенств.

5-З. Докажите, что в общем случае выполняются следующие соотношения:

$$\left(\frac{\partial F^*}{\partial b_i}\right)_+ \leqslant y_i^* \leqslant \left(\frac{\partial F^*}{\partial b_i}\right)_-, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$\left(\frac{\partial G^*}{\partial c_j}\right)_- \leqslant x_j^* \leqslant \left(\frac{\partial G^*}{\partial c_j}\right)_+, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь знаки «+» и «—» служат для обозначения соответственно правых и левых производных. См. [13].

5-И. Пусть $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ — решения двойственных задач линейного программирования с параметрами $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, а $\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^* + \Delta\mathbf{y}^*$ — решения двойственных задач с параметрами $\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$, $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ и $\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}$. Используя линейные неравенства задачи 5-Е, доказать, что



$$-\Delta\mathbf{c}\,\Delta\mathbf{x}^* + (\mathbf{y}^* + \Delta\mathbf{y}^*)\,\Delta\mathbf{A}\,\Delta\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{y}^*\mathbf{A}\,\Delta\mathbf{x}^* \leqslant 0.$$
$$-\Delta\mathbf{y}^*\,\Delta\mathbf{b} + \Delta\mathbf{y}\,\Delta\mathbf{A}\,(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}^*) + \Delta\mathbf{y}^*\mathbf{A}\,\Delta\mathbf{x}^* \geqslant 0.$$

На основе этих соотношений покажите, что если матрица $\Delta\mathbf{A}$ и вектор $\Delta\mathbf{b}$ становятся нулевыми, то $\Delta\mathbf{c}\Delta\mathbf{x}^* \geqslant 0$, и что если $\Delta\mathbf{A}$ и $\Delta\mathbf{c}$ становятся нулевыми, то $\Delta\mathbf{y}^*\Delta\mathbf{b} \leqslant 0$.

5-К. Покажите, что оптимальное значение целевой функции в задаче линейного программирования на максимум $F^*$ является субаддитивной функцией вектора коэффициентов целевой функции $\mathbf{c}$ и супераддитивной функцией вектора констант ограничений $\mathbf{b}$, т. е.

$$F^*(\mathbf{c}^1 + \mathbf{c}^2) \leqslant F^*(\mathbf{c}^1) + F^*(\mathbf{c}^2)$$
$$F^*(\mathbf{b}^1 + \mathbf{b}^2) \geqslant F^*(\mathbf{b}^1) + F^*(\mathbf{b}^2),$$

где $\mathbf{c}^1$ и $\mathbf{c}^2$ есть $n$-мерные векторы-строки, а $\mathbf{b}^1$ и $\mathbf{b}^2$ суть $m$-мерные векторы-столбцы.

5-Л. Доказать с помощью метода ограниченной вариации, изложенного в задаче 3-К, что в задаче линейного программирования решение достигается в экстремальной точке (вершине) допустимого множества.

5-М. Задачу линейного программирования (5.0.1) можно преобразовать в классическую задачу математического программирования. Для этого нужно превратить ограничения-неравенства в ограничения-равенства, используя вспомогательные переменные, и заменить неотрицательные переменные квадратами некоторых других переменных. Сделав такое преобразование, решите задачу, используя метод множителей Лагранжа. Какие выводы теории линейного программирования могут быть получены таким способом? См. [14].

5-Н. Ниже указаны параметры двойственных задач линейного программирования. Решите эти задачи симплекс-методом и дайте графическую иллюстрацию решения прямой задачи.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = (0 \ \ -5)$.

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = (1 \ \ 1)$.

3. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}=(3\ \ 4)$.

5-О. С помощью симплекс-метода решить задачи с указанными ниже параметрами:

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\mathbf{c}=(2\ 4\ 0\ 8)$.

2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\mathbf{c}=(1\ 1\ 2\ 3)$.

5-П. При решении задачи линейного программирования симплекс-методом часто предполагают, что задача является невырожденной. Это означает, что если ограничения-неравенства с помощью вспомогательных переменных преобразованы в равенства

$$\mathbf{Ax}+\mathbf{s}=\mathbf{b}$$

или если задача приведена к канонической форме,

$$\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}}=\mathbf{b},\quad \text{где}\quad \overline{\mathbf{A}}=(\mathbf{A}\ \mathbf{I}),\quad \overline{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix},$$

то любые $m$ векторов расширенной матрицы $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{b}$ линейно независимы. Иначе говоря, при всех $\overline{\mathbf{A}}_j$

$$\rho\,(\overline{\mathbf{A}}_j \vdots \mathbf{b}) = m,$$

где $\overline{\mathbf{A}}_j$ — это матрица $\overline{\mathbf{A}}$, из которой вычеркнут $j$-й столбец. Постройте пример вырожденной задачи, поясните его с помощью чертежа. Покажите, какие трудности возникают при применении симплекс-метода к такой задаче [1].

5-Р. Покажите, что симплекс-метод относится к числу градиентных методов. Направление градиента в данном

[1] Подробнее о случаях вырождения см. в указанной выше литературе по линейному программированию.



случае совпадает с предельным положением вектора, приложенного к некоторой произвольной точке, которую будем считать началом координат, и проходящего через точку плоской поверхности

$$\Delta = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \text{ где } x_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n$$

при $\Delta \to 0$ (см. [3]). (В противоположность этому случаю направление обычного градиента определяется как предельное положение вектора, приложенного к данной точке и проходящего через точку гиперсферы

$$\Delta^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

при $\Delta \to 0$.)

5-С. Примером задачи линейного программирования может служить задача о диете [1]. В этой задаче требуется минимизировать стоимость набора продуктов питания при условии, что этот набор включает все необходимые питательные вещества. Предположим, что имеется $m$ продуктов питания. Пусть $y_i$ обозначает приобретаемое количество $i$-го продукта, а $b_i$ — цену единицы веса этого продукта ($i = 1, 2, \ldots, m$). Тогда функция

$$G=\sum_{i=1}^{m} y_i b_i=\mathbf{yb},$$

где $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — неотрицательный вектор, представляет собой общую стоимость рациона питания, которую требуется минимизировать. Будем считать, что имеется $n$ питательных веществ, таких, как белки, углеводы, жиры, различные витамины и т. д., причем $c_j$ — это необходимое количество $j$-го питательного вещества, а $a_{ij}$ — количество этого вещества в единице веса $i$-го продукта. В таком случае условие о том, что составленный рацион питания удовлетворителен, выражается в форме системы неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geqslant c_j,\qquad j=1, 2, \ldots, n,$$

[1] См. [15,3]. Решение задачи о диете, полученное Штиглером на основе цен 1939 г., предусматривало использование только 9 компонентов: пшеничной муки, капусты, говяжьей печенки, арахисового масла, свиного сала, шпината, кукурузы, сухого молока и картофеля (не слишком привлекательная диета!). Общая стоимость продуктов в год составила 39,67 долл.

или в матричных обозначениях в следующей форме:

$$\mathbf{yA} \geqslant \mathbf{c}.$$

Таким образом, задача о диете состоит в следующем: найти

$$\min_{\mathbf{y}} G = \mathbf{yb}$$

при условии, что $\mathbf{yA} \geqslant \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \geqslant 0$.

1. Сформулируйте двойственную задачу. Какой смысл можно придать такой задаче?

2. Пусть имеется лишь два вида продуктов питания: мясо и яйца, причем цена мяса — два доллара за фунт, цена яиц — 10 центов за штуку. Будем рассматривать только два вида питательных веществ: минеральные соли и витамины. Допустим, что в фунте мяса содержится 1000 единиц минеральных солей и 300 единиц витаминов, а в одном яйце — 100 единиц минеральных солей и 2 единицы витаминов. Для питания необходимо не менее 60 000 единиц минеральных солей и 1500 единиц витаминов в месяц. Сколько мяса и яиц нужно приобрести за месяц, чтобы их общая стоимость была минимальной?

3. Как изменится решение задачи в п. 2, если дополнительно потребовать, чтобы потребляемое количество витаминов и минеральных солей не превышало количества этих веществ, необходимых для питания?

5-Т. Методы линейного программирования можно использовать для решения некоторых задач приближения функций по критерию минимизации максимального отклонения (критерий минимакса [1]). Пусть задача состоит в определении значений коэффициентов линейной функции

$$\hat{y} = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \ldots + w_n z_n$$

по критерию минимакса, исходя из того, что известны результаты $m$ наблюдений $(y_1, z_{11}, z_{21}, \ldots, z_{n1})$, $(y_2, z_{12}, z_{22}, \ldots, z_{n2})$, $\ldots$, $(y_m, z_{2m}, z_{2m}, \ldots, z_{nm})$. Представьте данную задачу в форме задачи линейного программирования.

[1] См. [16, 17]. Отметим, что критерий минимакса представляет собой альтернативу критерию метода наименьших квадратов, указанному в задаче 3-О.



5-У. Задача о коммивояжере состоит в следующем: коммивояжер, отправляясь из некоторого города, посещает $n - 1$ других городов, после чего возвращается в тот город, откуда он начинал свой путь. Найти маршрут, при котором коммивояжер проезжает наименьшее расстояние [18].

1. Решить задачу при $n = 4$.

2. Сформулировать эту задачу как задачу (целочисленного) линейного программирования.

5-Ф. В транспортной задаче требуется минимизировать стоимость перевозок товаров из одних пунктов в другие [1, 2, 3, 5]. Имеется $m$ пунктов отправления и $n$ пунктов назначения. Пусть $q_{ij}$ — количество грузов, перевозимых из пункта отправления $i$ в пункт назначения $j$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$). Допустим, что стоимость перевозки единицы груза из пункта $i$ в пункт $j$ равна $c_{ij}$, тогда

$$G = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_{ij}$$

представляет собой общую стоимость перевозок, которую требуется минимизировать, выбирая $mn$ неотрицательных значений переменных $q_{ij}$. Объем груза, имеющегося в $i$-м пункте отправления, равняется $a_i$, а количество товаров, которые нужно доставить в пункт назначения $j$, равно $r_j$. Таким образом, общее количество грузов, отправляемых из пункта $i$, не превосходит $a_i$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} \leqslant a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

а общее количество грузов, доставляемых в пункт $j$, должно быть не меньше чем $r_j$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{m} q_{ij} \geqslant r_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

При этом общая потребность в товарах не может быть больше, чем запасы их в пунктах отправления, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

1. Сформулируйте транспортную задачу в форме стандартной задачи линейного программирования на минимум.

2. Постройте двойственную задачу. Какой смысл можно придать этой задаче?

5-Х. Задача о максимальном потоке в сети. Рассмотрим некоторую сеть, состоящую из $n$ точек $P_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, называемых *узлами*, связанных между собой с помощью отрезков, называемых *ребрами*. Некоторый товар, имеющийся в узле $P_1$, должен поступить через сеть в узел $P_n$, где имеется потребность в этом товаре. Пропускной способностью ребра называется число $a_{ij}$ — максимальное количество единиц товара, которое может проходить между узлами $P_i$ и $P_j$ ($a_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, \ldots, n$). Задача состоит в том, чтобы выбрать значения потоков в сети таким образом, чтобы поток в $P_n$ был максимальным [1].

1. Решить задачу при $n = 4$.

2. Сформулировать эту задачу как задачу линейного программирования.

3. Постройте двойственную задачу; укажите ее интерпретацию.

[1] См. работу Форда и Фалкерсона [19], а также литературу, указанную в задаче 5-Ф. Задачу о потоках в сетях можно рассматривать как обобщение транспортной задачи, которую в свою очередь можно трактовать как обобщенный вариант распределительной задачи.