Приложение Б
Матрицы[1]

Б-1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

Матрица — это прямоугольная таблица вещественных чисел. Размеры этой таблицы (число строк и число столбцов) определяют *порядок* матрицы. Матрица A имеет порядок $m \times n$, если

$$\underset{m\times n}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \qquad (Б.1.1)$$

где i — индекс строки ($i = 1, 2, \dots, m$), а j — индекс столбца ($j = 1, 2, \dots, n$). Если $m = n = 1$, то матрица представляет собой не что иное, как скаляр (обычное действительное число). Матрица, у которой число m или n равно 1, представляет собой *вектор*: *вектор-строку*, если $m = 1$, или *вектор-столбец*, если $n = 1$. Для обозначения скаляров обычно применяются строчные буквы (например, k), для обозначения векторов — строчные буквы, набранные жирным шрифтом (например, $\mathbf{x}$), а для обозначения матриц — прописные буквы, набранные жирным шрифтом (например, $\mathbf{A}$). Если $m = n$, то матрица называется *квадратной*. В этом случае все элементы, у которых $i = j$, начиная со стоящего в левом верхнем углу элемента с индексами (1,1) и кончая стоящим в правом нижнем углу элементом с индексами (n, n), называются элементами *главной диагонали*.

Приведем некоторые примеры матриц, используемых в экономике: *матрица, составленная из данных временных рядов*

$$\underset{G\times T}{\mathbf{X}} = (x_{gt}), \quad g = 1, 2, \dots, G; \quad t = 1, 2, \dots, T, \qquad (Б.1.2)$$

где x_{gt} — наблюденное значение переменной g в момент времени t; *матрица Леонтьева* (*матрица затраты-выпуск*)

$$\underset{n\times n}{\mathbf{L}} = (l_{ij}), \quad l_{ij} \geqslant 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \qquad (Б.1.3)$$

где l_{ij} — затраты i-го вида продукции, необходимые для производства единицы j-го вида продукции, причем рассматривается

[1] Основная литература по теории матриц: [1, 2, 3, 4]. В настоящей книге рассматриваются только матрицы, составленные из вещественных чисел.

экономика, производящая n видов продукции (товаров); *матрица Маркова* (*матрица переходных вероятностей*)

$$\underset{n\times n}{\mathbf{M}} = (m_{ij}); \quad m_{ij} \geqslant 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \qquad (Б.1.4)$$

где m_{ij} — вероятность перехода системы, имеющей n возможных состояний, из состояния i в состояние j.

Б-2. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю:

$$\underset{m\times n}{\mathbf{0}} = (a_{ij}), \text{ где } a_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

например,

$$(0), \ (00), \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (Б.2.1)$$

Единичной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, а все прочие элементы равны нулю:

$$\underset{n\times n}{\mathbf{I}} = (\delta_{ij}), \text{ где } \delta_{ij} = 1, \text{ если } i = j,$$

$$\delta_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \qquad (Б.2.2)$$

например,

$$(1), \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Строки единичной матрицы — это единичные векторы-строки:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots 0) \text{ и т. д.}$$

Вектор, составленный из единиц, имеет вид

$$\underset{1\times n}{\mathbf{I}} = (1, 1, \dots, 1). \qquad (Б.2.3)$$

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, в которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю:

$$\underset{n\times n}{\mathbf{D}} = (d_{ij}), \text{ где } d_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \qquad (Б.2.4)$$

Например, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; любая единичная матрица.

Треугольная матрица — это квадратная матрица, у которой

35—0270

все элементы, стоящие по одну из сторон главной диагонали, равны нулю:

$$\underset{n\times n}{\mathbf{T}}=(t_{ij}),\ \text{где}\ t_{ij}=0,\ \text{если}\ i>j\ \text{или}\ i<j,$$
$$i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad \text{(Б.2.5)}$$

Например, $\begin{pmatrix}6 & -1\\ 0 & 8\end{pmatrix}$; любая диагональная матрица.

Квадратная матрица называется *матрицей перестановок*, если в каждой ее строке и в каждом ее столбце содержится один элемент, равный 1, а все остальные элементы нулевые, например,

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Существует $n!=n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)$ матриц перестановок порядка n, одной из которых является единичная матрица.

Блочная матрица — это матрица, элементы которой разбиты на некоторое число подматриц, например, следующим образом:

$$\underset{m\times n}{\mathbf{A}}=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c:c}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \hdashline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{array}\right)\begin{array}{l}m_1\\ m-m_1,\end{array}\\ \begin{array}{cc}n_1 & n-n_1\end{array}\end{array} \qquad \text{(Б.2.6)}$$

где $\mathbf{A}_{11}$ — матрица порядка $m_1\times n_1$, $\mathbf{A}_{12}$ — матрица порядка $m_1\times(n-n_1)$ и т. д.

Блочно-диагональная матрица — это матрица, которую можно разбить на подматрицы таким образом, чтобы только на ее «главной диагонали» стояли ненулевые квадратные матрицы:

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{c:c:c:c}\mathbf{A}_{11} & 0 & \ldots & 0\\ \hdashline 0 & \mathbf{A}_{22} & \ldots & 0\\ \hdashline \vdots & & & \\ \hdashline 0 & 0 & \ldots & \mathbf{A}_{qq}\end{array}\right). \qquad \text{(Б.2.7)}$$

Блочно-треугольная матрица — это матрица, которую можно разбить на подматрицы таким образом, чтобы по одну сторону ее «главной диагонали», составленной из подматриц, стояли нули. Примерами блочных треугольных матриц могут служить треугольная матрица и блочно-диагональная матрица.

Б-3. ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МАТРИЦАМИ И ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Две матрицы *равны*, если они имеют одинаковый порядок и их соответствующие элементы равны, т. е.

$$\mathbf{A}=\mathbf{B},\ \text{если}\ a_{ij}=b_{ij},\quad i=1,\ 2,\ \ldots\ m;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad \text{(Б.3.1)}$$

Матричные неравенства:

$$\mathbf{A}>\mathbf{B},\ \text{если}\ a_{ij}>b_{ij},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$
$$\mathbf{A}\geqslant\mathbf{B},\ \text{если}\ a_{ij}\geqslant b_{ij},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad \text{(Б.3.2)}$$

Сложение двух матриц одного и того же порядка означает сложение соответствующих элементов этих матриц:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C},\ \text{где}\ c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;$$
$$j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad \text{(Б.3.3)}$$

Например,

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Отметим, что

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} \qquad \text{(Б.3.4)}$$
$$\mathbf{A}+0=\mathbf{A}$$

Умножение матрицы на скаляр означает умножение всех элементов этой матрицы на скаляр:

$$k\mathbf{A}=\mathbf{B},\ \text{где}\ b_{ij}=ka_{ij},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad \text{(Б.3.5)}$$

Например,

$$6\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 12 & -6\end{pmatrix}.$$

Отметим, что

$$k\mathbf{A}=\mathbf{A}k$$
$$k(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\mathbf{A}+k\mathbf{B}$$
$$(k+l)\mathbf{A}=k\mathbf{A}+l\mathbf{A} \qquad \text{(Б.3.6)}$$
$$(kl)\mathbf{A}=k(l\mathbf{A})$$
$$(-1)\mathbf{A}=-\mathbf{A}\ \text{— противоположная матрица,}$$
$$\mathbf{A}+(-1)\mathbf{B}=\mathbf{A}-\mathbf{B}\ \text{— вычитание матриц.}$$

При *умножении двух матриц* число столбцов в матрице, стоящей слева, должно равняться числу строк в матрице, стоящей справа. Элементы произведения матриц получают в результате попарного перемножения элементов строки матрицы, стоящей слева, и соответствующих элементов столбца матрицы, стоящей справа, и последующего сложения этих попарных произведений:

$$\underset{m\times r}{\mathbf{A}}\ \underset{r\times n}{\mathbf{B}}=\underset{m\times n}{\mathbf{C}},\ \text{где}\ c_{ij}=\sum_{k=1}^{r}a_{ik}b_{kj},$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad \text{(Б.3.7)}$$

Например,

$$(a_{11}a_{12})\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}\ \ a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 1\\ 10 & 15\end{pmatrix}.$$

Отметим, что AB, как правило, *не* равно BA, даже если BA определено. В том случае, когда произведения AB и BA определены и равны, матрицы A и B называются *коммутативными*.

Отметим, что

$$
\begin{gathered}
\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}\\
(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}\\
\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}\\
k(\mathbf{AB})=\mathbf{A}(k\mathbf{B})\\
\mathbf{A0}=\mathbf{0A}=\mathbf{0}\\
\mathbf{AI}=\mathbf{IA}=\mathbf{A}.
\end{gathered}
\qquad (\text{Б}.3.8)
$$

Умножение матрицы слева на матрицу перестановок приводит к перестановке строк матрицы, а умножение на матрицу перестановок справа приводит к перестановке столбцов матрицы, например,

$$
\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1\\2&4\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}2&4\\6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\1&6\end{pmatrix}.
$$

Степенью матрицы называется результат многократного умножения матрицы самой на себя:

$$
\mathbf{A}^t=\mathbf{A}\mathbf{A}^{t-1};\quad t=1,\ 2,\ \ldots \qquad (\text{Б}.3.9)
$$

Отметим, что

$$
\begin{gathered}
\mathbf{A}^0=\mathbf{I}\\
\mathbf{A}^t\mathbf{A}^s=\mathbf{A}^{t+s}\\
(\mathbf{A}^t)^s=\mathbf{A}^{ts}.
\end{gathered}
\qquad (\text{Б}.3.10)
$$

Матрица A называется *идемпотентной*, если $A^2 = A$. Например, матрица $\begin{pmatrix}6&10\\-3&-5\end{pmatrix}$ является идемпотентной.

Внутреннее, или *скалярное*, *произведение* двух векторов — это произведение вектора-строки на вектор-столбец, равное скаляру:

$$
\underset{1\times n}{\mathbf{w}}\ \underset{n\times 1}{\mathbf{x}}=\sum_{j=1}^{n} w_j x_j. \qquad (\text{Б}.3.11)
$$

Например, $(1\ \ 3)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=-1$.

Векторы называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Например, векторы $(4\ \ 6)$ и $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ ортогональны.

Внешнее произведение двух векторов — это произведение вектора-столбца на вектор-строку, равное матрице:

$$
\underset{n\times 1}{\mathbf{x}}\ \underset{1\times n}{\mathbf{w}}=\begin{pmatrix}x_1w_1&\ldots&x_1w_n\\ \vdots&&\\ x_nw_1&\ldots&x_nw_n\end{pmatrix} \qquad (\text{Б}.3.12)
$$

Транспонирование матрицы состоит в том, что строки матрицы становятся столбцами, а столбцы строками:

$$
\text{если}\ \underset{m\times n}{\mathbf{A}}=(a_{ij}),\ \text{то}\ \underset{n\times m}{\mathbf{A}'}=(a_{ij}),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,
$$

$$
j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (\text{Б}.3.13)
$$

Например,

$$
\begin{pmatrix}4&2&3\\8&0&-1\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}4&8\\2&0\\3&-1\end{pmatrix}.
$$

Отметим, что

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{A}')'=\mathbf{A}\\
(k\mathbf{A})'=k\mathbf{A}'\\
(\mathbf{A}+\mathbf{B})'=\mathbf{A}'+\mathbf{B}'\\
(\mathbf{AB})'=\mathbf{B}'\mathbf{A}'
\end{gathered}
\qquad (\text{Б}.3.14)
$$

Матрица A называется *симметрической*, если $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$. Например, матрица $\begin{pmatrix}8&2\\2&-6\end{pmatrix}$ есть симметрическая. Симметрическая матрица порядка n содержит $n(n+1)/2$ независимых элементов. Квадратная матрица A называется *кососимметрической*, если $\mathbf{A} = -\mathbf{A}'$. Например, $\begin{pmatrix}0&5\\-5&0\end{pmatrix}$ есть кососимметрическая матрица. Кососимметрическая матрица порядка n содержит $n(n-1)/2$ независимых элементов, так как все элементы главной диагонали должны равняться нулю.

Если x есть вектор-столбец длины n, то *скалярное произведение*

$$
\mathbf{x}'\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{n} x_j^2=|\mathbf{x}|^2 \qquad (\text{Б}.3.15)
$$

представляет собой сумму квадратов. Величина $|\mathbf{x}|$ — корень квадратный из суммы квадратов называется *нормой* x. Вектор x называется нормализованным, если $|\mathbf{x}| = 1$. *Матрицей рассеяния* называется симметрическая матрица, являющаяся внешним произведением:

$$
\mathbf{xx}'=\begin{pmatrix}x_1^2&x_1x_2&\ldots&x_1x_n\\ \vdots&&&\\ x_nx_1&&\ldots&x_n^2\end{pmatrix} \qquad (\text{Б}.3.16)
$$

Например, если $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, то $\mathbf{x}'\mathbf{x}=10$, $|\mathbf{x}|=\sqrt{10}$, $\mathbf{xx}'=\begin{pmatrix}9&3\\3&1\end{pmatrix}$.

Квадратная матрица A называется *ортогональной*, если каждый вектор-столбец в A нормализован и ортогонален к любому другому ее вектору-столбцу, так что

$$
\mathbf{A}'\mathbf{A}=\mathbf{I}, \qquad (\text{Б}.3.17)
$$

например,

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{40}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-6}{\sqrt{40}} \end{pmatrix}.$$

Любая матрица перестановок является ортогональной.

Квадратная матрица A называется *разложимой*, если существует матрица перестановок P, такая, что

$$\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P}=\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline 0 & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right), \tag{Б.3.18}$$

где $\mathbf{A}_{11}$ и $\mathbf{A}_{22}$ — квадратные матрицы. В противном случае матрица A называется *неразложимой* (или *связанной*). Например, матрица $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ разложима, так как из нее с помощью матрицы перестановок $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ можно получить матрицу $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

Матрица A порядка $n \times n$ неразложима тогда, и только тогда, когда для любой пары индексов (i, j) существует набор индексов $j_1, j_2, \ldots, j_l$, такой, что $a_{ij_1} a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_l j} \neq 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Б-4. СКАЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ НА МАТРИЦАХ

Следом квадратной матрицы порядка n называется сумма элементов ее главной диагонали

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \tag{Б.4.1}$$

например,

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}=10.$$

Отметим, что

$$\begin{gathered} \operatorname{tr}(\mathbf{I})=n, \quad \operatorname{tr}(0)=0 \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}')=\operatorname{tr}(\mathbf{A}) \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}')=\operatorname{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{A})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \\ \operatorname{tr}(k\mathbf{A})=k\operatorname{tr}(\mathbf{A}) \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B})=\operatorname{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}) \end{gathered} \tag{Б.4.2}$$

Если порядок A и B одинаков, то $\operatorname{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\operatorname{tr}(\mathbf{A})+\operatorname{tr}(\mathbf{B})$.

Определителем квадратной матрицы порядка n называется алгебраическая сумма $n!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение n элементов матрицы — по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца, взятое с определенным знаком:

$$|\mathbf{A}|=\det(\mathbf{A})=\sum_{\substack{\text{все } n! \\ \text{перестановок} \\ (i_1, \ldots, i_n)}} \operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_n)\, a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n}, \tag{Б.4.3}$$

например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

где $\operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_n)$ равен $+1$, если перестановка $i_1, \ldots, i_n$ четная, или -1, если эта перестановка нечетная. Расположение чисел $i_1, \ldots, i_n$ называется четной (нечетной) перестановкой, если оно получено в результате четного (нечетного) числа попарных перестановок (транспозиций) элементов множества $(1, 2, \ldots, n)$. Отметим, что

$$\begin{gathered} |\mathbf{I}|=1, \quad |0|=0 \\ |\mathbf{A}|=|\mathbf{A}'|=(-1)^n|-\mathbf{A}|=(\lambda)^{-n}|\lambda\mathbf{A}| \\ |\mathbf{A}\mathbf{B}|=|\mathbf{B}\mathbf{A}| \end{gathered} \tag{Б.4.4}$$

Если A — диагональная или треугольная матрица, то $|\mathbf{A}|=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

Если каждая строка (или столбец) A является нетривиальной линейной комбинацией всех остальных строк (или столбцов) матрицы A, то $|\mathbf{A}|=0$. В частности, если две строки (два столбца) матрицы A равны или некоторая строка (некоторый столбец) состоит из одних нулей, то $|\mathbf{A}|=0$.

Если B получена из A в результате перемены местами двух строк (или столбцов), то $|\mathbf{B}|=-|\mathbf{A}|$.

Если B получена из A умножением одной из строк (одного из столбцов) A на k, то $|\mathbf{B}|=k|\mathbf{A}|$.

Главным минором k-го порядка квадратной матрицы называется детерминант матрицы порядка $k \times k$, составленной из первых k строк и первых k столбцов матрицы A:

$$M_k=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}. \tag{Б.4.5}$$

Матрица удовлетворяет условиям *Хоукинса — Саймона*, если все ее главные миноры положительны.

Минором k-го порядка квадратной матрицы A порядка называется главный минор k-го порядка матрицы $\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P}$, где P — некоторая матрица перестановок. *Следом k-го порядка* — α_k называется сумма всех возможных $n!/k!\,(n-k)!$ главных миноров k-го порядка, т. е.

$$\begin{aligned} \alpha_1&=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}=\operatorname{tr}(\mathbf{A}) \\ \alpha_2&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\ldots \\ &\vdots \\ \alpha_n&=|\mathbf{A}|. \end{aligned} \tag{Б.4.6}$$

Если из квадратной матрицы A вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец, то определитель M_{ij}, получающейся при этом квадратной матририцы порядка $(n-1)\times(n-1)$ называется *минором элемента с индексами* (i, j):

$$M_{ij}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (\text{Б.4.7})$$

Выражение

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, n; \quad j=1, 2, \dots, n. \qquad (\text{Б.4.8})$$

называется *алгебраическим дополнением* элемента с индексами (i, j). Алгебраическое дополнение либо совпадает с минором M_{ij}, либо равно $-M_{ij}$ в зависимости от того, четно или нечетно число $i+j$. Определитель можно вычислить, разлагая его по алгебраическим дополнениям:

$$|\mathrm{A}|=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}, \quad j=1, 2, \dots, n \text{ (разложение по столбцу)}$$
$$|\mathrm{A}|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, n \text{ (разложение по строке)}. \qquad (\text{Б.4.9})$$

Рангом $\rho(\mathrm{A})$ матрицы A называется наибольший порядок не обращающихся в нуль миноров этой матрицы. По другому, эквивалентному, определению, ранг матрицы — это максимальное число линейно независимых строк (или столбцов) матрицы A, т. е. ранг матрицы — это размерность подпространства, натянутого на строки (или векторы) матрицы A.

Например,

$$\rho\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}=2, \quad \rho\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=1.$$

Отметим, что

$0\leqslant\rho(\mathrm{A})=$ целое число $\leqslant\min(m, n)$, где A — матрица порядка $m\times n$

$$\rho(\mathrm{I})=n, \quad \rho(0)=0, \quad \rho(\mathrm{P})=n \qquad (\text{Б.4.10})$$
$$\rho(\mathrm{A}')=\rho(\mathrm{A})=\rho(\mathrm{A}'\mathrm{A}).$$

Если матрицы A и B имеют один и тот же порядок, то

$$\rho(\mathrm{A}+\mathrm{B})\leqslant\rho(\mathrm{A})+\rho(\mathrm{B}).$$

Если AB определено, то $\rho(\mathrm{AB})\leqslant\min[\rho(\mathrm{A}), \rho(\mathrm{B})]$.

Если A есть диагональная матрица, то $\rho(\mathrm{A})$ равен числу ненулевых элементов.

Если A есть идемпотентная матрица, то $\rho(\mathrm{A})=\mathrm{tr}(\mathrm{A})$.

Ранг матрицы не меняется, если одна строка (или столбец) умножена на постоянное число, не равное нулю или если строка (столбец), умноженная на число, прибавлена к другой строке (столбцу).

Квадратная матрица порядка n называется *невырожденной*, если $\rho(\mathrm{A})=n$, то есть $|\mathrm{A}|\neq 0$. В противном случае A называется *вырожденной* ($|\mathrm{A}|=0$). Ранг произведения некоторой матрицы A справа или слева на невырожденную матрицу равен рангу матрицы A.

Б-5. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Если A — квадратная невырожденная матрица порядка n, то существует единственная *обратная матрица* A^{-1}, такая, что

$$\mathrm{AA}^{-1}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}=\mathrm{I}. \qquad (\text{Б.5.1})$$

Обратную матрицу можно вычислить по формуле

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{(C_{ij})'}{|\mathrm{A}|}=\frac{((-1)^{i+j}M_{ij})}{|\mathrm{A}|}, \qquad (\text{Б.5.2})$$

где (C_{ij}) — матрица, составленная из алгебраических дополнений. Матрица $(C_{ij})'$ называется *присоединенной*. Например, если

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad \mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что

$$\mathrm{I}^{-1}=\mathrm{I}$$
$$(\mathrm{A}^{-1})^{-1}=\mathrm{A}, \quad (A')^{-1}=(\mathrm{A}^{-1})', \quad |\mathrm{A}^{-1}|=|\mathrm{A}|^{-1},$$

$(\mathrm{AB})^{-1}=\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$, если обе матрицы A и B, невырожденные; (Б.5.3)

$\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{A}'$ тогда, и только тогда, когда A — ортогональная матрица.

Если входящие в блочную матрицу

$$\mathrm{A}=\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \hline \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{array}\right) \qquad (\text{Б.5.4})$$

матрицы A_{22} и $\mathrm{D}=\mathrm{A}_{11}-\mathrm{A}_{12}\mathrm{A}_{22}^{-1}\mathrm{A}_{21}$ невырожденные, то

$$\mathrm{A}^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{D}^{-1} & -\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A}_{12}\mathrm{A}_{22}^{-1} \\ \hline -\mathrm{A}_{22}^{-1}\mathrm{A}_{21}\mathrm{D}^{-1} & \mathrm{A}_{22}^{-1}(\mathrm{I}+\mathrm{A}_{21}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A}_{12}\mathrm{A}_{22}^{-1}) \end{array}\right). \qquad (\text{Б.55})$$

Если A — неотрицательная квадратная матрица, то (I — A) имеет неотрицательную обратную матрицу тогда, и только тогда, когда I — A удовлетворяет условию Хоукинса — Саймона (все главные миноры положительны). Кроме того,

$$(\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}=\mathrm{I}+\mathrm{A}+\mathrm{A}^2+\dots \qquad (\text{Б.5.6})$$

Две квадратные матрицы одного порядка A и B называются *подобными*, если существует невырожденная матрица M, такая, что

$$\mathrm{B}=\mathrm{M}^{-1}\mathrm{AM}, \qquad (\text{Б.5.7})$$

при этом

$$|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|$$
$$\rho(\mathbf{A})=\rho(\mathbf{B}) \tag{Б.5.8}$$
$$\mathbf{B}^t=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{M}.$$

Б-6. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Систему m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned} \tag{Б.6.1}$$

записываем в виде матричного уравнения

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}, \tag{Б.6.2}$$

где $\mathbf{A}=(a_{ij})$ — матрица коэффициентов порядка $m\times n$, $\mathbf{x}=(x_j)$ — вектор-столбец переменных, а $\mathbf{b}=(b_i)$ — вектор-столбец постоянных ($i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$). Применяя знак суммирования, эту систему можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, \quad i=1, \ldots m. \tag{Б.6.3}$$

Пример такой системы:

$$2x_1+3x_2=7$$
$$x_1+4x_2=6.$$

Матричное уравнение этой системы:

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 6\end{pmatrix}.$$

Система линейных уравнений либо имеет единственное решение, либо имеет неединственное решение, либо не имеет решений. Решение существует тогда, и только тогда, когда

$$\rho(\mathbf{A})=\rho(\mathbf{A}\,\vdots\,\mathbf{b})=r. \tag{Б.6.4}$$

Если решение существует, то оно будет единственным тогда, и только тогда, когда $r=n$. Если решение существует, но $r<n$, то $n-r$ переменным можно присваивать произвольные значения.

Если матрица коэффициентов квадратная (число уравнений равно числу неизвестных) и невырожденная (уравнения независимы), т. е. $m=n$ и $\rho(\mathbf{A})=n$, то решение единственно. Решение можно получить, умножая обе части матричного уравнения слева на обратную матрицу

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \tag{Б.6.5}$$

Например, решение матричного уравнения

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 6\end{pmatrix}$$

есть

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Решение можно также получить с помощью *правила Крамера*:

$$x_j=\frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{A}|}, \quad j=1, 2, \ldots, n, \tag{Б.6.6}$$

где $\mathbf{A}_j$ — матрица, полученная из $\mathbf{A}$ заменой j-го столбца матрицы $\mathbf{A}$ столбцом $\mathbf{b}$. В приведенном выше примере

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}7 & 3\\ 6 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}}=2.$$

Единственное решение может существовать и в том случае, когда $m\neq n$. Например, если

$$\begin{pmatrix}2\\ 8\end{pmatrix}x_1=\begin{pmatrix}6\\ 24\end{pmatrix},$$

то

$$x_1=3.$$

Если система уравнений является *однородной*, т. е. вектор постоянных этой системы равен нулю ($\mathbf{b}=0$), и если ранг матрицы коэффициентов меньше n ($\rho(\mathbf{A})=r<n$), то система имеет неединственное решение. В этом случае $n-r$ переменным можно присваивать произвольные значения. Приведем пример:

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

где $n-r=1$. Если положить x_1, равным произвольному числу c, то решение имеет вид

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\ -c/2\end{pmatrix}.$$

Так как $\rho(\mathbf{A})\leqslant\min(m, n)$, то решение системы неединственно и в том случае, когда число уравнений меньше числа неизвестных ($m<n$), конечно, если выполнено условие, что $\rho(\mathbf{A})=\rho(\mathbf{A}\,\vdots\,\mathbf{b})$. Например, если

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 8 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix};$$

то если положить x_1 равным произвольному значению c, то все решения имеют вид

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\ 2-4c\\ 8-14c\end{pmatrix}.$$

Система не имеет решений, если

$$\rho(\mathbf{A}) < \rho(\mathbf{A} \vdots \mathbf{b}).$$

Примеры таких систем:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

С геометрической точки зрения всякое линейное уравнение определяет гиперплоскость в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Если все m гиперплоскостей пересекаются в одной точке, то эта точка является единственным решением системы линейных уравнений. Если же при пересечении этих гиперплоскостей образуется прямая (плоскость и т. д.), то все точки этой прямой (плоскости и т. д.) являются решениями и одной (двум или более) переменным можно присваивать произвольные значения. Если они не пересекаются (например, если это параллельные прямые в E^2), то система не имеет решения. Однородное уравнение определяет гиперплоскость, проходящую через начало координат. Если система имеет единственное решение, то им является тривиальное решение — точка начала координат.

Систему линейных неравенств

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{gathered} \tag{Б.6.7}$$

можно представить в виде матричного неравенства

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b} \tag{Б.6.8}$$

(**A**, **x** и **b** определены выше) [1]. Эта система также либо имеет единственное решение, либо неединственное решение, либо не имеет решений. Например, система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_1 \leqslant \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix},$$

состоящая из двух неравенств $x_1 \leqslant 6$ и $x_1 \geqslant 6$, имеет единственное решение при $x_1 = 6$, тогда как система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_1 \leqslant \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

не имеет решений, поскольку неравенства $x_1 \leqslant 2$ и $x_1 \geqslant 4$ не могут выполняться одновременно. Примером системы, имеющей неединственное решение, может служить

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

[1] Основная литература по линейным неравенствам: [5, 6, 7].

Решениями этой системы являются все точки, лежащие ниже прямых $2x_1 + 3x_2 = 7$ и $x_1 + 4x_2 = 6$.

Геометрически каждое линейное неравенство определяет замкнутое полупространство в n-мерном евклидовом пространстве, а система линейных неравенств определяет пересечение полупространств. Такое пересечение называется *многогранным выпуклым множеством*, если же это множество замкнуто, то оно называется *многогранником*.

Одним из важных видов систем линейных однородных неравенств является

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots x_n \geqslant 0,$$

где $m = n$, $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$. Эта система определяет неотрицательный ортант n-мерного евклидова пространства.

Приведем ряд важных теорем о системах линейных неравенств. Согласно *теореме Фаркаша*, если при всех **x**, удовлетворяющих однородным линейным неравенствам

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant 0, \tag{Б.6.9}$$

справедливо неравенство

$$\mathbf{c}\mathbf{x} \leqslant 0, \tag{Б.6.10}$$

то вектор-строка **c** является неотрицательной линейной комбинацией строк матрицы **A**, т. е.

$$\mathbf{c} = \mathbf{y}\mathbf{A}, \quad \mathbf{y} \geqslant 0. \tag{Б.6.11}$$

Следовательно, возможно одно из двух: либо система неравенств

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant 0, \quad \mathbf{c}\mathbf{x} > 0 \tag{Б.6.12}$$

разрешима, либо существует решение системы

$$\mathbf{c} = \mathbf{y}\mathbf{A}, \quad \mathbf{y} \geqslant 0. \tag{Б.6.13}$$

Тривиальной иллюстрацией теоремы является скалярный случай, когда A и c есть скаляры. Тогда (Б.6.12) выполняется, если знаки чисел A и c различны, а (Б.6.13) выполняется, если знаки A и c совпадают.

Существует несколько важных теорем, касающихся двойственных систем однородных линейных неравенств

$$\begin{gathered} \mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant 0, \quad \mathbf{x} \geqslant 0 \\ \mathbf{y}\mathbf{A} \geqslant 0, \quad \mathbf{y} \geqslant 0 \end{gathered} \tag{Б.6.14}$$

Одна из этих систем называется *прямой*, а другая — *двойственной*. Согласно *теореме об альтернативах для матриц*, возможно одно из двух: либо существует нетривиальное решение прямой системы, либо существует такое решение двойственной системы, при котором все неравенства выполняются как строгие неравенства. В частности, система

$$\mathbf{A}\mathbf{x} < 0, \quad \mathbf{x} > 0 \tag{Б.6.15}$$

не имеет решений тогда, и только тогда, когда существует нетривиальное решение у системы

$$\mathbf{y}\mathbf{A} \geqslant 0, \quad \mathbf{y} \geqslant 0 \tag{Б.6.16}$$

Согласно *ключевой теореме*, двойственные системы всегда обладают решениями $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$, при которых

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x}^*+\mathbf{y}^{*\prime}&>0\\ \mathbf{y}^*\mathbf{A}+\mathbf{x}^*&>0.\end{aligned}\tag{Б.6.17}$$

В важном случае, когда $\mathbf{A}$ — кососимметрическая матрица ($\mathbf{A} = -\mathbf{A}'$), система линейных однородных неравенств

$$\mathbf{A}\mathbf{x}\leqslant 0, \quad \mathbf{x}\geqslant 0, \tag{Б.6.18}$$

имеет решение $\mathbf{x}^*$, при котором

$$-\mathbf{A}\mathbf{x}^*+\mathbf{x}^*>0. \tag{Б.6.19}$$

Б-7. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ; ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА И ВЕКТОРЫ

Любая матрица $\mathbf{A}$ порядка $m \times n$ определяет некоторое линейное преобразование n-мерного евклидова пространства в m-мерное евклидово пространство. Это означает, что для любого вектора $\mathbf{x} \in E^n$ существует единственный вектор $\mathbf{y} \in E^n$, такой, что

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{A}(\mathbf{x}). \tag{Б.7.1}$$

Это преобразование является линейным, так как

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{x}^1+\mathbf{x}^2)&=\mathbf{A}\mathbf{x}^1+\mathbf{A}\mathbf{x}^2\\ \mathbf{A}(k\mathbf{x}^1)&=k\mathbf{A}(\mathbf{x}^1),\end{aligned}\tag{Б.7.2}$$

где $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ есть векторы в E^n, а k — скаляр. Отметим, что $\mathbf{A}(0) = 0$ и что линейное преобразование отображает выпуклое множество из E^n в выпуклое множество, принадлежащее пространству E^m.

Характеристическим (*собственным*) *вектором* квадратной матрицы $\mathbf{A}$ называется такой ненулевой вектор $\mathbf{x}$, который после преобразования $\mathbf{A}$ переходит в вектор, отличающийся от $\mathbf{x}$ лишь на постоянный числовой множитель, т. е.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}. \tag{Б.7.3}$$

Числовой множитель λ называется *характеристическим корнем* для $\mathbf{A}$. Так как уравнение (Б.7.3) может быть представлено в виде однородной системы уравнений

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x}=0, \tag{Б.7.4}$$

то нетривиальное решение этого уравнения существует лишь в том случае, если

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0 \tag{Б.7.5}$$

(см. раздел 6.6). Уравнение (Б.7.5) называется *характеристическим уравнением*. Если $\mathbf{A}$ — матрица порядка $n \times n$, то характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением степени n относительно λ:

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=(-\lambda)^n+\alpha_1(-\lambda)^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}(-\lambda)+\alpha_n=0, \tag{Б.7.6}$$

где α_k — след k-го порядка матрицы $\mathbf{A}$, $k = 1, \ldots, n$. Это уравнение имеет n не обязательно различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$,

причем некоторые из них могут быть комплексными. Каждому из этих характеристических корней соответствует характеристический вектор, определенный с точностью до постоянного множителя. Так, например, характеристическое уравнение для матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}6 & 10\\ -2 & -3\end{pmatrix}$ имеет вид $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Корни этого уравнения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Характеристическими векторами, соответствующими λ_1 и λ_2, являются соответственно $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix}c\\ -c/2\end{pmatrix}$ и $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix}c\\ -2/5c\end{pmatrix}$, где c — произвольная постоянная. Постоянные часто исключают из рассмотрения, вводя нормализованные векторы. В данном примере нормализованными векторами являются $\begin{pmatrix}2/\sqrt{5}\\ -1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}5/\sqrt{29}\\ -2/\sqrt{29}\end{pmatrix}$.

Сумма характеристических корней равна следу матрицы:

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=\operatorname{tr}(\mathbf{A})=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}=\alpha_1. \tag{Б.7.7}$$

Произведение характеристических корней равно определителю матрицы:

$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=|\mathbf{A}|=\alpha_n \tag{Б.7.8}$$

Число ненулевых характеристических корней $\mathbf{A}$ совпадает с рангом матрицы $\mathbf{A}$. В частности, характеристическими корнями диагональной матрицы являются элементы ее главной диагонали, а характеристическими корнями идемпонентной матрицы являются либо 0, либо 1. Если λ — характеристический корень $\mathbf{A}$, то λ^t — характеристический корень $\mathbf{A}^t$, t — любое положительное целое число (если $\mathbf{A}$ — невырожденная, то t — любое целое число).

Согласно *теореме Кэли — Гамильтона*, матрица $\mathbf{A}$ является корнем своего собственного характеристического уравнения, т. е.

$$(-\mathbf{A})^n+\alpha_1(-\mathbf{A})^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}(-\mathbf{A})+\alpha_n\mathbf{I}=0. \tag{Б.7.9}$$

Согласно *теореме о доминантной матрице*, характеристические корни матрицы $\mathbf{A}$ неотрицательны, если в любой строке ее диагональный элемент будет не меньше суммы абсолютных значений всех остальных элементов этой строки:

$$a_{ii}\geqslant\sum_{j\neq i}|a_{ij}|, \quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{Б.7.10}$$

Согласно *теореме Рута — Гурвица*, действительные части характеристических корней матрицы $\mathbf{A}$ отрицательны тогда, и только тогда, когда положительны указанные ниже n определителей:

$$\beta_1>0, \quad \begin{vmatrix}\beta_1 & 1\\ \beta_3 & \beta_2\end{vmatrix}>0, \ldots, \begin{vmatrix}\beta_1 & 1 & 0 & 0 & 0\ldots\\ \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & 1 & 0\ldots\\ \beta_5 & \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1\ldots\\ \vdots & & & & \\ \beta_{2n-1}\ldots & & & & \end{vmatrix}>0, \tag{Б.7.11}$$

где β_k — коэффициент при λ^k в характеристическом уравнении $k = 1, 2, \ldots, n$. Например, в случае, если $n = 2$, то теорема утверждает, что действительные части характеристических корней отрицательны тогда, и только тогда, когда след матрицы отрицателен, а определитель ее положителен (поскольку $\beta_1 = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A})$, $\beta_2 = |\mathbf{A}|$, $\beta_3 = 0$).

Если матрица **A** симметрическая, то все ее характеристические корни вещественны, характеристические векторы взаимно ортогональны и существует такая ортогональная матрица **M**, что

$$\mathbf{M}'\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{\Lambda}. \tag{Б.7.12}$$

Здесь Λ — это диагональная матрица, диагональными элементами которой являются характеристические корни матрицы **A**. Ортогональная матрица **M** называется *модальной*. Столбцами этой матрицы являются нормализованные характеристические векторы матрицы **A**. Например, симметрическую матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ можно привести к диагональному виду $\Lambda = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, где $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 2$, используя матрицу $\mathbf{M} = 1/\sqrt{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Согласно *теореме Фробениуса*, если **A** — неразложимая матрица с неотрицательными вещественными элементами, то существует единственный вещественный неотрицательный характеристический корень λ^*, превышающий по абсолютной величине все другие характеристические корни λ матрицы **A**, т. е. $|\lambda| \leqslant \lambda^*$ Корень λ^* является невозрастающей функцией любого элемента матрицы **A**. Выполняется следующее неравенство:

$$\min_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqslant \lambda^* \leqslant \max_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}. \tag{Б.7.13}$$

Б-8. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Если **A** — квадратная симметрическая матрица, а **x** — вектор-столбец, то квадратичной формой матрицы **A** называется

$$Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n. \tag{Б.8.1}$$

Например, если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1x_2$.

Квадратичной формой диагональной матрицы $\mathbf{D} = (d_j\delta_{ij})$ является $\sum_{j=1}^{n} d_jx_j^2$, представляющая собой просто *взвешенную сумму квадратов*.

Приводя симметрическую матрицу к диагональному виду (Б.7.12), получаем:

$$Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}'\mathbf{M}'\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{y}'\Lambda\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2, \tag{Б.8.2}$$

где **M** — модальная матрица, а $\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{M}'\mathbf{x}$. Следовательно, квадратичную форму $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ всегда можно представить в виде взвешенной суммы квадратов, весами в которой являются характеристические корни матрицы **A**.

Квадратичная форма $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ называется *положительно определенной*, если $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) > 0$ при всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$; $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ называется *отрицательно определенной*, если $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) < 0$ при всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$; она называется *положительно полуопределенной*, если $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \geqslant 0$ при всех **x** и если существуют такие **x**, что $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = 0$; квадратичная форма называется *отрицательно полуопределенной*, если $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \leqslant 0$ при всех **x** и если существуют такие **x**, что $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = 0$; во всех остальных случаях квадратичная форма называется *неопределенной*. Матрицу **A**, соответствующую квадратичной форме, иногда называют положительно определенной (отрицательно определенной и т. д.), если $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ является положительно определенной (отрицательно определенной и т. д.).

Квадратичная форма $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ является положительно определенной тогда, и только тогда, когда все характеристические корни **A** положительны или, что эквивалентно, если все главные миноры матрицы **A** положительны. Квадратичная форма $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ отрицательно определена тогда, и только тогда, когда все характеристические корни **A** отрицательны или, что эквивалентно, когда у главных миноров чередуются знаки «плюс» и «минус». Квадратичная форма положительно полуопределена тогда, и только тогда, когда все характеристические корни неотрицательны и по крайней мере один из них равен нулю; она отрицательно полуопределена тогда, и только тогда, когда все характеристические корни неположительны и по крайней мере один из них равен нулю.

Квадратичная форма $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ является положительно (полу) определенной тогда, и только тогда, когда $Q_{-\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ отрицательно (полу) определена. Если $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ положительно определена, то обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ существует, а $Q_{\mathbf{A}^{-1}}(\mathbf{x})$ является положительно определенной.

Пусть **A** — симметрическая матрица порядка n. Тогда квадратичная форма, $Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$, удовлетворяющая m линейным ограничениям $\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$, где **B** — фиксированная матрица порядка $m \times n$ $(m < n)$ является положительно определенной лишь в том случае, если знаки последних $n - m$ главных миноров окаймленной матрицы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{A} \end{pmatrix} \tag{Б.8.3}$$

совпадают со знаком $(-1)^m$, т. е. если m — четное (нечетное), то все $n - m$ главных миноров являются положительными (отрицательными) числами. Эти условия можно представить в следующей форме:

$$(-1)^m \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_r \\ \mathbf{B}_r' & \mathbf{A}_r \end{vmatrix} > 0, \quad r = m+1, \ldots, n, \tag{Б.8.4}$$

где $\mathbf{B}_r$ — матрица, составленная из первых r столбцов матрицы $\mathbf{B}$, а $\mathbf{A}_r$ — матрица, составленная из первых r строк и столбцов матрицы $\mathbf{A}$. Например, если $m=2$, $n=4$, то условия имеют вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{11} & b_{21} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{12} & b_{22} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{13} & b_{23} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_{11} \dots b_{14} \\ 0 & 0 & b_{21} \dots b_{24} \\ b_{11} & b_{21} & a_{11} \dots a_{14} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ b_{14} & b_{24} & a_{41} \quad\quad a_{44} \end{vmatrix} > 0.$$

Если $\mathbf{A}$ — симметрическая матрица порядка n, удовлетворяющая m линейным ограничениям $\mathbf{Bx}=0$, где $\mathbf{B}$ — матрица порядка $m\times n$ $(m<n)$, то $\mathbf{A}$ будет отрицательно определенной матрицей тогда, и только тогда, когда знаки последних $n-m$ главных миноров окаймленной матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{A} \end{pmatrix} \tag{Б.8.5}$$

чередуются, причем знак первого из этих миноров определяется знаком $(-1)^{m+1}$. Эти условия можно представить в следующей форме:

$$(-1)^r \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{B}_r \\ \mathbf{B}_r & \mathbf{A}_r \end{vmatrix} > 0 \text{ при } r=m+1, \dots, n, \tag{Б.8.6}$$

где $\mathbf{B}_r$ и $\mathbf{A}_r$ определяются так же, как было указано выше. В приведенном примере, где $m=2$, $n=4$, эти условия состоят в том, что первый определитель должен быть отрицательным, а второй положительным.

Б-9. ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ МАТРИЦ

При дифференцировании матриц и при дифференцировании относительно матриц принимается ряд условных соглашений.

Во-первых, считают, что производной вектора-строки (вектора-столбца) относительно скалярной переменной также является вектор-строка (вектор-столбец). Так, например, если $\mathbf{x}$ — это вектор-столбец

$$\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)', \tag{Б.9.1}$$

а t — скалярный параметр, от которого зависит x_i $(i=1, \dots, n)$, то

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right)'. \tag{Б.9.2}$$

Во-вторых, принимают, что производной скалярной величины относительно вектора-столбца (вектора-строки) является вектор-строка (вектор-столбец). Так, если скаляр y есть дифференцируемая функция вектора-столбца $\mathbf{x}$

$$y=f(\mathbf{x})=f(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{Б.9.3}$$

то вектором частных производных первого порядка — *градиентом* — является вектор-строка

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right). \tag{Б.9.4}$$

Например, для линейной формы

$$L_{\mathbf{C}}(\mathbf{x})=\mathbf{cx}, \qquad \frac{\partial L_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})=\mathbf{c}, \tag{Б.9.5}$$

а для квадратичной формы

$$Q_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})=\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \frac{\partial Q_{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})=2\mathbf{x}'\mathbf{A}. \tag{Б.9.6}$$

В обоих случаях производной скалярной величины относительно вектора-столбца является вектор-строка. Производной билинейной формы

$$B_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}, \mathbf{x})=\mathbf{wAx}, \tag{Б.9.7}$$

где $\mathbf{w}$ — вектор-строка, $\mathbf{x}$ — вектор-столбец, а $\mathbf{A}$ — матрица порядка $m\times n$,

$$\frac{\partial B_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}=\mathbf{wA}, \quad \frac{\partial B_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{w}}=\mathbf{Ax} \tag{Б.9.8}$$

по вектору-столбцу (вектору-строке) является вектор-строка (вектор-столбец).

Третье условное соглашение состоит в том, что производной скалярной величины по матрице порядка $m\times n$ является матрица порядка $n\times m$. Так, для билинейной формы (Б.9.7)

$$\frac{\partial B_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{A}}=\mathbf{xw}, \tag{Б.9.9}$$

а если $\mathbf{A}$ — квадратная невырожденная матрица, то

$$\mathbf{B}_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}, \mathbf{x})=\mathbf{wC}^{-1}\mathbf{x}, \text{ где } \mathbf{C}=\mathbf{A}^{-1}, \tag{Б.9.10}$$

так что

$$\frac{\partial B_{\mathbf{A}}(\mathbf{w}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{C}}=-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{xwC}^{-1}. \tag{Б.9.11}$$

Наконец, принимают, что производной вектора по вектору является матрица. Так, производной градиента (Б.9.4) по n-мерному вектору-столбцу $\mathbf{x}$ является *матрица Гессе* порядка $n\times n$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x})=\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(\mathbf{x}) \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2}(\mathbf{x}) \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad \text{(Б.9.12)}$$

Например, матрицей Гессе квадратичной формы (Б.9.6) является матрица 2A. Аналогично, если вектор-столбец

$$\mathbf{g}=\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \text{(Б.9.13)}$$

состоит из m функций, зависящих от n-мерного вектора-столбца $\mathbf{x}$, то производной этого вектора по x является *матрица Якоби* порядка $m \times n$:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathrm{x}}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \ldots \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \ldots \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \ldots \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad \text{(Б.9.14)}$$

Если, кроме того, x_i ($i = 1, \ldots, n$) зависят от параметра t, то производная вектора-столбца $\mathbf{g}$ по скаляру t суть вектор-столбец

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt}=\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathrm{x}}\,\frac{d\mathrm{x}}{dt}. \quad \text{(Б.9.15)}$$

Согласно *теореме о неявной функции*, если имеются m непрерывно дифференцируемых функций n переменных — $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ($m < n$) и если ранг матрицы Якоби равен числу строк, т. е.

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathrm{x}}\right)=m, \quad \text{(Б.9.16)}$$

то систему уравнений $\mathbf{g}(\mathrm{x}) = 0$ можно разрешить относительно некоторых m переменных, скажем $x_1, x_2, \ldots, x_m$, представив их в виде функций от остальных $n - m$ переменных $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$:

$$x_i=h_i(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n), \quad i=1, 2, \ldots, m. \quad \text{(Б.9.17)}$$