Приложение А
Анализ

А-1. Множества

Множество[1] — это любая совокупность объектов, называемых *точками* или *элементами*. Примерами множеств могут служить множество студентов в группе, множество всех четных чисел. Если множество S состоит из точек a, b, c, то это записывается следующим образом:

$$S=\{a, b, c\}, \tag{A.1.1}$$

причем порядок, в котором записаны элементы в скобках, не имеет значения. Условие, что точка b принадлежит множеству S, а d не принадлежит S, записывается так:

$$b\in S, \quad d\notin S. \tag{A.1.2}$$

Множество можно определить, указав некоторое свойство, общее для всех его элементов. Так, множество A, определяемое выражением

$$A=\{x\in S \mid P(x)\}, \tag{A.1.3}$$

состоит из всех тех элементов множества S, которые обладают свойством $P(x)$. Иногда в такой записи опускают символ большего множества S.

Приводим некоторые важные примеры множеств: $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество всех положительных чисел; E — множество всех вещественных чисел (геометрически — это множество всех точек вещественной оси); $Q = \{x | x = p/q$ или $x = -p/q$, где $q \in I$ и либо $p = 0$, либо $p \in I\}$ — множество всех рациональных чисел;

$\varnothing$ — пустое множество, т. е. множество, не содержащее элементов.

Множество A является *подмножеством* множества B, что обозначается как $A \subset B$, в том, и только в том случае, если любая точка множества A принадлежит также и B. Например, $I \subset Q$, а $Q \subset E$. Множества A и B равны ($A = B$) в том, и только в том случае, если любая точка множества A принадлежит также и множеству B, и наоборот. Следовательно, $A = B$ тогда, и только тогда, когда A является подмножеством B, а B — подмножеством A. Множество A

[1] Основная литература по теории множеств, а также по отношениям и функциям [1, 2, 3, 4]. В качестве введения в теорию множеств и в анализ см. [5, 6, 7].

называется *собственным подмножеством* множества B, если A представляет собой подмножество B, не равное B.

Пусть множество A является подмножеством множества S (в этом случае множество S называют «универсальным множеством»). Множество $\widetilde{A}$ называется дополнением A до множества S, если

$$\widetilde{A}=\{x\in S \mid x\notin A\}, \tag{A.1.4}$$

т. е. $\widetilde{A}$ содержит точки S, не принадлежащие A. Например, $\widetilde{Q}$ — это множество всех иррациональных чисел.

Объединением подмножеств A и B множества S называется множество точек, принадлежащих каждому множеству (или обоим множествам). Объединение A и B обозначают символом $A \cup B$:

$$A\cup B=\{x\in S \mid x\in A \text{ или } x\in B\}. \tag{A.1.5}$$

Пересечением A и B называют множество точек, общих множествам A и B. Пересечение A и B обозначают символом $A \cap B$:

$$A\cap B=\{x\in S \mid x\in A \text{ и } x\in B\}, \tag{A.1.6}$$

Множества A и B называются непересекающимися, если $A \cap B = \varnothing$. Примерами непересекающихся множеств являются любое множество и его дополнение.

Множество точек $A \sim B$, состоящее из точек, принадлежащих A, но не принадлежащих B, называется разностью множества A и B:

$$A\sim B=\{x\in S \mid x\in A \text{ и } x\notin B\}=A\cap \widetilde{B}. \tag{A.1.7}$$

Декартовым произведением $A \times B$ множеств A и B называется множество упорядоченных пар элементов A и B:

$$A\times B=\{(a, b) \mid a\in A,\ b\in B\}. \tag{A.1.8}$$

Совокупность элементов (a, b) является *упорядоченной парой* тогда, и только тогда, когда из соотношения $(a, b)=(a', b')$ следует, что $a=a'$, $b=b'$. Например, если $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,6\}$, то $A\times B = \{(1,1), (1,6), (2,1), (2,6), (3,1), (3,6)\}$. Декартово произведение множества A самого на себя — это $A \times A = A^2$. В частности, E^2 — множество всех упорядоченных пар вещественных чисел, или геометрически, множество всех точек на евклидовой плоскости. Трехмерное евклидово пространство E^3 есть $E \times E^2$, а евклидово n-мерное пространство E^n есть $E \times E^{n-1}$. Другими словами, оно представляет собой множество всех упорядоченных наборов из n вещественных чисел:

$$E^n=\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ где } x_j\in E,\ j=1, 2, \ldots, n\}. \tag{A.1.9}$$

А-2. ОТНОШЕНИЯ И ФУНКЦИИ

Отношением R называется подмножество декартова произведения $X \times Y$, в котором при любых фиксированных $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется следующее

$$xRy \text{ тогда, и только тогда, когда } (x, y)\in R$$
$$x\not R y \text{ тогда, и только тогда, когда } (x, y)\notin R. \tag{A.2.1}$$

Примерами отношений, определенных на E^2, являются $=$, $>$, $\geqslant$;, примерами отношений на множестве P^2, где P — множество, состоящее из всех людей, являются отношения «быть отцом» или «быть братом»; примерами отношений, определенных на S^2, где S — семейство множеств, являются отношения $\subset$ и $=$.

Отношение R, определенное на X^2, называется *совершенным*, если при любых x, $y \in X$ имеет место либо xRy, либо yRx (либо оба эти отношения). Отношение R на X^2 называется *транзитивным*, если при всех x, y, $z \in X$ из xRy и yRz следует xRz. Отношение R называется *рефлексивным*, если при всех $x \in X$ имеет место xRx. Отношение R *симметрично*, если из xRy следует yRx; *асимметрично*, если из xRy следует $y\bar{R}x$; *антисимметрично*, если из xRy и yRx следует, что $x = y$ при любых x, $y \in X$. Отношение называется *отношением полуупорядоченности*, если оно транзитивно и рефлексивно.

Отношение называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает свойствами транзитивности, рефлексивности и симметричности. К отношениям эквивалентности относится отношение $=$. Используя отношение эквивалентности R, можно строить *классы эквивалентности*, то есть множества $\{x \in X \mid xRy\}$, где $y \in X$ — некоторые заданные элементы X. Отношение называется отношением *слабого порядка*, если оно транзитивно, рефлексивно и антисимметрично, например отношения $\geqslant$. Отношение называется отношением *сильного* (*строгого*) *порядка*, если оно транзитивно и асимметрично, например отношение $>$.

Отношение f, определенное на $X \times Y$, называется *функцией*, если при любом $x \in X$ существует единственный элемент $y \in Y$, такой, что xfy, то есть, если $(x, y) \in f$ и $(x, y') \in f$, то $y = y'$. Следовательно,

$$y = f(x) \text{ тогда, и только тогда, когда } (x, y) \in f. \qquad (A.2.2)$$

Множество X называется *областью определения* функции, а множество Y — областью значений функции. Образом функции называется множество точек области значений, которое можно получить, используя данную функцию:

$$\{y \in Y \mid y = f(x) \text{ при некотором } x \in X\}. \qquad (A.2.3)$$

Функция называется *«отображением на»*, если ее образ совпадает с областью значений. Функция называется *взаимнооднозначной*, если две различные точки никогда не отображаются ею в одну и ту же точку:

$$f(x) = f(x') \text{ тогда, и только тогда, когда } x = x'. \qquad (A.2.4)$$

Если функция $f(x)$ представляет собой взаимнооднозначное отображение на, то существует *обратная функция* $f^{-1}(y)$. Это означает, что,

$$\text{если } f^{-1}(y) = x, \text{ то } y = f(x). \qquad (A.2.5)$$

Функция называется *вещественной*, если ее областью значений является E. Укажем некоторые примеры вещественных функций, определенных на множестве вещественных чисел:

линейная функция: $y = ax + b$

полиноминальная функция: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_px^p = \sum_{i=0}^{p} a_ix^i$

показательная функция: $y = a^x$, где $a > 0$

логарифмическая функция — функция обратная к показательной: $y = \log_a x$.

Функцией n переменных называется вещественная функция, определенная на n-мерном евклидовом пространстве. Такая функция обозначается следующим образом:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x}). \qquad (A.2.6)$$

Приведем некоторые примеры:

линейная форма:

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \sum_{j=1}^{n} a_jx_j$$

квадратичная форма:

$$y = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \ldots = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \text{ где } a_{ij} = a_{ji}.$$

Функционал — это вещественная функция, определенная на некотором множестве функций, т. е. область определения функционала есть некоторое множество функций. Например, если в качестве такого множества взять множество всех вещественных функций $x(t)$ одной переменной t, определенных на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, то,

$$y = \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} x(t)$$

представляет собой функционал. Другим примером функционала может служить известный в вариационном исчислении функционал

$$J\{x(t)\} = \int_{t_0}^{t_1} I\left(x(t), \frac{dx}{dt}(t), t\right) dt. \qquad (A.2.7)$$

Соответствием (точечно-множественным отображением) называется функция, которая отдельным точкам ставит в соответствие множества. Множество $\varphi(x)$ называется множеством, поставленным в соответствие точке x.

Множество называется *счетным*, если существует взаимнооднозначная функция, отображающая элементы этого множества в некоторое подмножество множества целых чисел. Например, для множества рациональных чисел такой функцией является $f(p, q) = 2^p3^q$, следовательно, множество рациональных чисел счетно. Множество S называется *бесконечным*, если существует взаимнооднозначная функция между S и некоторым собственным подмножеством множества S. Так, например, множество целых чисел бесконечно, поскольку функция $y = 2x$ есть взаимнооднозначная функция между множеством целых чисел и множеством четных чисел.

А-3. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Множество X является *метрическим пространством* [1], если на декартовом произведении X^2 определена вещественная функция $d(x, y)$, называемая *метрикой*, такая, что для всех x, y, z из X выполняются условия:

$$d(x, y) \geqslant 0 \text{ и } d(x, y) = 0 \text{ тогда, и только тогда, когда } x = y,$$
$$d(x, y) = d(y, x)$$
$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z). \qquad \text{(A 3.1)}$$

Величина $d(x, y)$ называется *расстоянием* между x и y. Евклидово n-мерное пространство E^n является метрическим пространством с евклидовым расстоянием между $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, т. е.

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}. \qquad \text{(A.3.2)}$$

Другим примером функции расстояния (*метрики*) в E^n или вообще в произвольном множестве X является *дискретная метрика*, по которой $d(x, y) = 1$, если x не равен y, и $d(x, y) = 0$, если x равен y.

Если задано метрическое пространство X и расстояние $d(x, y)$, определенное на X^2, то множество

$$N_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}, \qquad \text{(A.3.3)}$$

где ε — некоторое положительное число, называется ε-окрестностью точки $x \in X$. Например, ε-окрестностью точки x на вещественной прямой E, согласно (A.3.2), является $\{y \in E \mid |x - y| < \varepsilon\}$, где $|x|$ — это *абсолютное значение* x, равное x, если $x \geqslant 0$, и равное $-x$, если $x < 0$. В пространстве E^2 с евклидовой метрикой ε-окрестность представляет собой внутреннюю часть круга радиуса ε с центром в точке x.

Пусть A — подмножество метрического пространства. Точка x называется *внутренней точкой* A, если существует ε-окрестность x, содержащая только точки из A, т. е.

$$N_\varepsilon(x) \subset A \text{ при некотором } \varepsilon > 0. \qquad \text{(A.3.4)}$$

Множество всех внутренних точек A — внутреннюю часть множества A — обозначим $I(A)$:

$$I(A) \subset A.$$

Множество A называется *открытым*, если оно совпадает с множеством своих внутренних точек, то есть если все точки A внутренние.

---

[1] Основная литература по метрическим пространствам: [8, 9, 10].

В частности, все ε-окрестности суть открытые множества. Открытым множеством является также открытый интервал (a, b) на вещественной прямой, т. е. множество $\{x \in E \mid a < x < b\}$. Множество внутренних точек любого множества открыто; оно является «наибольшим» открытым множеством, содержащимся в данном множестве. Иначе говоря, множество внутренних точек суть объединение всех открытых множеств, содержащихся в данном множестве.

Точка x является *граничной точкой* некоторого подмножества A метрического пространства, если любая ε-окрестность x содержит хотя бы одну точку из A и хотя бы одну точку, не принадлежащую A, то есть

$$N_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing, \quad N_\varepsilon(x) \cap \widetilde{A} \neq \varnothing \text{ при любом } \varepsilon > 0. \qquad \text{(A.3.5)}$$

Границей $B(A)$ множества A называется множество всех граничных точек A. Объединение A и границы $B(A)$ называется *замыканием* $C(A)$ множества A. Множество A замкнуто тогда, и только тогда, когда оно равно своему замыканию, то есть тогда, и только тогда, когда A содержит все свои граничные точки. Примером замкнутого множества может служить замкнутый промежуток $[a, b]$ вещественной прямой, то есть множество $\{x \in E \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, для которого $B([a, b]) = \{a, b\}$ и $I([a, b]) = \{a, b\}$. Замыкание любого множества замкнуто; оно является «наименьшим» замкнутым множеством, содержащим данное множество. Иначе говоря, замыкание суть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих данное множество. Конечно, существуют множества, не являющиеся ни замкнутыми, ни открытыми. Таковы, например, полуоткрытые интервалы на вещественной прямой — $[a, b)$ и $(a, b]$, т. е. множества $\{x \in E \mid a \leqslant x < b\}$ и $\{x \in E \mid a < x \leqslant b\}$. Евклидово n-мерное пространство E^n и пустое множество $\varnothing$ являются и замкнутыми и открытыми. Пространство E^n обладает следующим свойством: любое его подмножество S имеет конечное или счетное подмножество, замыкание которого содержит S.

Подмножество A метрического пространства называется *ограниченным*, если расстояние между любыми двумя точками из A является конечным числом. В противном случае А неограничено.

Функция, область определения которой есть множество положительных чисел I, а область значений — метрическое пространство X, называется *последовательностью* точек в X и обозначается символом $\{x_i\}$, где $i \in I$. Последовательность $\{x_i\}$ *сходится* к x_0 тогда, и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется целое число N, такое, что если $i > N$, то $d(x_i, x_0) < \varepsilon$. Точка x_0 называется пределом последовательности $\{x_i\}$, что записывается следующим образом:

$$x_0 = \lim_{i \to \infty} x_i. \qquad \text{(A.3.6)}$$

Например, предел последовательности $\{1/i\}$ равен 0. Пусть A — подмножество метрического пространства. Точка x является *предельной точкой* множества A тогда, и только тогда, когда в A существует последовательность попарно различных точек, сходящихся к x.

Множество A метрического пространства называется *компактным*, если в любой последовательности точек из A существует некоторая подпоследовательность, сходящаяся к точке, принадлежащей A (*свойство Больцано — Вейерштрасса*). Множество является компактным тогда, и только тогда, когда в любом семействе открытых множеств, объединение которых содержит A, существует некоторое конечное подмножество открытых множеств, объединение которых также содержит A (*свойство Гейне — Бореля*). Если A — подмножество в E^n, то A компактно тогда, и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Примерами таких множеств являются любой конечный замкнутый промежуток $[a, b]$ в E и любая ограниченная сфера (с включением границы) в E^3. Любое компактное подмножество из E содержит свою точную верхнюю границу, т. е. для любого компактного подмножества А существует вещественное число $x \in A$, такое, что x является наименьшим из чисел, для которых $y \leqslant x$ при любых $y \in A$.

Пусть область определения и область значений функции $f(x)$ являются подмножествами метрических пространств. Тогда y_0 является пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0,

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) \tag{A.3.7}$$

тогда, и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что если $0 < d(x, x_0) < \delta$, то $d(f(x), y_0) < \varepsilon$. Иначе y_0 является предлогом тогда, и только тогда, когда функция $f(x)$ принимает значения, сколь угодно близкие к y_0, если x достаточно близок к x_0.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{A.3.8}$$

т. е. если $0 < d(x, x_0) < \delta$, то $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы любой последовательности $\{x_i\}$, сходящейся к x_0, соответствовала последовательность $\{f(x_i)\}$, сходящаяся к $f(x_0)$. Функция называется *непрерывной*, если она непрерывна во всех точках своей области определения. Вещественная функция $f(x)$ называется *полунепрерывной сверху в точке* x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $0 < d(x, x_0) < \delta$, то $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. Функция $f(x)$ называется *полунепрерывной снизу в точке* x_0, если из тех же условий следует, что $f(x_0) - \varepsilon < f(x)$. Следовательно, вещественная функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда, и только тогда, когда она полунепрерывна сверху и снизу в точке x_0; вещественная функция непрерывна тогда, и только тогда, когда она полунепрерывна сверху во всех точках (полунепрерывна сверху) и полунепрерывна снизу во всех точках (полунепрерывна снизу). Для того чтобы функция $f(x)$ была полунепрерывна сверху, необходимо и достаточно, чтобы множество $\{x \mid f(x) < a\}$ было открытым при любом a, а для того чтобы $f(x)$ была полунепрерывна снизу, необходимо и достаточно, чтобы $\{x \mid f(x) > a\}$ было открытым при любом a.

Теорема Брауэра о неподвижной точке. Если X — непустое, замкнутое и ограниченное (компактное) выпуклое подмножество пространства E^n, а $f(\mathbf{x})$ — непрерывная функция, отображающая X в себя, то существует хотя бы одна точка $\mathbf{x}^* \in X$, которая отображается сама в себя, т. е.

$$f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*. \tag{A3.9}$$

Точка $\mathbf{x}^*$ называется *неподвижной точкой* функции f. Простым примером, иллюстрирующим эту теорему, может служить любая непрерывная вещественная функция $f(x)$ одной переменной, такая, что $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Всякая функция такого типа пересекает прямую, образующую с осью абсцисс угол в 45° по меньшей мере в одной точке.

Пусть $\varphi(x)$ — соответствие, сопоставляющее каждой точке x некоторого подмножества X метрического пространства некоторое подмножество $\varphi(x)$ из X. Соответствие $\varphi(x)$ называется *полунепрерывным сверху в точке* x_0, если выполнено следующее условие: пусть $\{x_i\}$ — произвольная последовательность точек, сходящаяся к x_0, тогда, если $\{y_i\}$ произвольная последовательность точек, сходящаяся к y_0, причем $y_i \in \varphi(x_i)$, $y_0 \in \varphi(x_0)$. Соответствие называется *полунепрерывным снизу в точке* x_0, если для любой последовательности $\{x_i\}$, сходящейся к x_0, и некоторой точки $y_0 \in \varphi(x_0)$ существует сходящаяся к y_0 последовательность $\{y_i\}$, где $y_i \in \varphi(x_i)$. Соответствие называется *полунепрерывным сверху* (*снизу*), если оно полунепрерывно сверху (снизу) во всех точках своей области определения; соответствие *непрерывно*, если оно полунепрерывно и сверху и снизу.

Теорема Какутани о неподвижной точке. Если X — непустое, замкнутое и ограниченное (компактное) выпуклое подмножество пространства E^n, а $\varphi(\mathbf{x})$ — соответствие, сопоставляющее точкам из X подмножества из множества X, причем $\varphi(\mathbf{x})$ полунепрерывно сверху, то существует хотя бы одна точка $\mathbf{x}^* \in X$, такая, что

$$\mathbf{x}^* \in \varphi(\mathbf{x}^*). \tag{A.3.10}$$

Точка $\mathbf{x}^*$, принадлежащая множеству $\varphi(\mathbf{x}^*)$, в которое она отображается, называется *неподвижной точкой* соответствия.

А-4. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Векторное пространство[1] V — это множество точек, называемых векторами, для которых определены две операции: сложение векторов и умножение вектора на скаляр. *Сложением* векторов называется операция, которая каждой паре векторов $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ из V^2 ставит в соответствие некоторый вектор $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ множества V, называемый *суммой* $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, причем выполняются следующие условия:

$$\begin{gathered} \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x} \\ \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} \\ \mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x} \\ \mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}, \end{gathered} \tag{A.4.1}$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — любые элементы множества V, $\mathbf{0}$ — некоторый единственный элемент из V, называемый нулевым вектором (не смешивать с числом 0!), а $(-\mathbf{x})$ — некоторый элемент из V. *Умножением* вектора на скаляр называется операция, которая каждой точке

[1] Основная литература по векторным пространствам: [11, 12, 23].

$(a, \mathbf{x})$ из $E \times V$ ставит в соответствие некоторую точку $a\mathbf{x}$ из V, называемую *произведением* скаляра a и вектора $\mathbf{x}$, причем выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= a\mathbf{x}+a\mathbf{y} \\ (a+b)\mathbf{x} &= a\mathbf{x}+b\mathbf{x} \\ (ab)\mathbf{x} &= a(b\mathbf{x}) \\ 1\mathbf{x} &= \mathbf{x} \end{aligned} \tag{A.4.2}$$

при любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и любых $a, b \in E$. Евклидово пространство E^n представляет собой векторное пространство, в котором эти две операции определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}+\mathbf{y} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)+(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ &= (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \\ a\mathbf{x} &= a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n), \end{aligned} \tag{A.4.3}$$

т. е. для того, чтобы сложить наборы из n вещественных чисел, следует сложить соответствующие компоненты этих наборов, а для умножения набора из n вещественных чисел на скаляр следует умножить каждую из компонент на этот скаляр.

Если множества A и B являются подмножествами векторного пространства V, то *суммой* $A+B$ этих множеств называется множество всех тех точек, которые могут быть представлены в виде суммы точки из A и точки из B, т. е.

$$A+B=\{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x}=\mathbf{a}+\mathbf{b},\ \mathbf{a} \in A,\ \mathbf{b} \in B\}. \tag{A.4.4}$$

Например, если $A=\{1, 2, 3\}$, а $B=\{1, 6\}$, то $A+B=\{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$

Если и область определения и область значений функции f суть векторные пространства, то функция называется *аддитивной*, если

$$f(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=f(\mathbf{x}_1)+f(\mathbf{x}_2) \tag{A.4.5}$$

при любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$, X — область определения f. Функция называется *супераддитивной* (*субаддитивной*), если

$$f(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) \geqslant (\leqslant) f(\mathbf{x}_1)+f(\mathbf{x}_2). \tag{A.4.6}$$

Следовательно, аддитивная функция является и супераддитивной и субаддитивной. Аддитивная функция, удовлетворяющая условию

$$f(a\mathbf{x})=af(\mathbf{x}) \tag{A.4.7}$$

при любом $\mathbf{x} \in X$ и любом $a \in E$, называется *линейным преобразованием*. Примером линейного преобразования является линейная форма.

Векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, принадлежащие векторному пространству V, называются *линейно независимыми*, если из

$$a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+\ldots+a_n\mathbf{x}_n=0 \tag{A.4.8}$$

следует, что

$$a_1=a_2=\ldots=a_n=0, \tag{A.4.9}$$

т. е. линейная комбинация этих векторов обращается в нуль лишь тогда, когда все ее коэффициенты равны 0. В противном случае

векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *линейно зависимы*, т. е. один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных. Пользуясь геометрическими представлениями, можно сказать, что два вектора линейно зависимы, если они лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, и что три вектора линейно зависимы, если они лежат на одной и той же плоскости, проходящей через начало координат.

Если векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно независимы и любой вектор $\mathbf{x}$ из V может быть представлен в виде линейной комбинации этих n векторов

$$\mathbf{x}=a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+\ldots+a_n\mathbf{x}_n, \tag{A.4.10}$$

то векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ являются *базисом* пространства V, а *размерность* V равна n. Размерность E^n равна n; один из базисов этого пространства состоит из единичных векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, \ldots, 1). \end{aligned} \tag{A.4.11}$$

Подмножество S векторного пространства называется *подпространством*, если оно замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения на скаляр, так что если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ принадлежат S, то $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ и $a\mathbf{x}$ также принадлежат S. *Размерностью* подпространства называется максимальное число линейно независимых векторов, которое может входить в это подпространство. Например, плоскость, проходящая через начало координат в E^3, есть подпространство размерности 2.

Векторное пространство V называется *нормированным*, если для каждого вектора $\mathbf{x} \in V$ существует вещественное число

$\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, *называемое* нормой вектора $\mathbf{x}$, такое что $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$ и $\|\mathbf{x}\|=0$ тогда, и только тогда, когда $\mathbf{x}=\mathbf{0}$,

$$\begin{aligned} \|a\mathbf{x}\| &= |a|\,\|\mathbf{x}\|, \\ \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| &\leqslant \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|, \end{aligned} \tag{A.4.12}$$

($|a|$ — абсолютное значение скаляра a). Евклидово n-мерное пространство является нормированным векторным пространством, например, при норме

$$|\mathbf{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}. \tag{A.4.13}$$

Нормированное векторное пространство является метрическим пространством, так как расстояние между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ можно определить по формуле

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

А.5. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ [1]

Подмножество S векторного пространства называется *выпуклым*, если для любых точек $\mathbf{x} \in S$ и $\mathbf{y} \in S$

$$a\mathbf{x}+(1-a)\,\mathbf{y} \in S, \quad 0 \leqslant a \leqslant 1. \tag{A.5.1}$$

С геометрической точки зрения множество является выпуклым лишь тогда, когда вместе с любыми двумя своими точками это множество содержит и соединяющий их отрезок. Приводим некоторые примеры выпуклых множеств:

евклидово пространство E^n

гиперплоскость в E^n, определяемая как

$$\left\{\mathbf{x} \in E^n \,\Big|\, \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b\right\}$$

(замкнутое) полупространство в E^n, определяемое как

$$\left\{\mathbf{x} \in E^n \,\Big|\, \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b\right\}.$$

Еще одним примером выпуклых множеств является выпуклый конус. Выпуклым конусом называется любое подмножество векторного пространства, замкнутое относительно сложения векторов и умножения вектора на неотрицательные скаляры, т. е. C является выпуклым конусом, если наряду с любыми точками $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, принадлежащими C, точки $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ и $a\mathbf{x}$ $(a \geqslant 0)$ также принадлежат C. Примеры невыпуклых множеств: множество целых чисел, множество рациональных чисел.

Выпуклой линейной комбинацией точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ называется точка $\mathbf{x}$, которую можно представить в виде

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_p\mathbf{x}_p,$$

где

$$a_1, a_2, \ldots, a_p \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{p} a_i = 1. \tag{A.5.2}$$

Множество S выпукло тогда, и только тогда, когда любая выпуклая линейная комбинация точек из S принадлежит S.

Если множества A и B выпуклы, то их пересечение $A \cap B$ и сумма $A+B$ также выпуклы. Однако объединение этих множеств может быть невыпуклым. Пересечение конечного числа замкнутых полупространств есть выпуклое множество, называемое *многогранным выпуклым множеством*.

Крайней (экстремальной) точкой выпуклого множества называется такой элемент этого множества, который не может быть представлен в виде выпуклой линейной комбинации двух различных точек множества. Например, крайними точками треугольника являются его вершины. Множество называется *строго выпуклым*, если оно выпукло и все его граничные точки являются крайними. Примером такого множества может служить замкнутая сфера в E^3. Выпуклое множество, вообще говоря, может не иметь ни одной крайней точки. Примером такого множества является любое открытое выпуклое множество.

Выпуклой оболочкой множества A называется «наименьшее» выпуклое множество, содержащее A, т. е. множество, являющееся пересечением всех выпуклых множеств, в которые входит A. Выпуклое множество совпадает со своей выпуклой оболочкой. Если же множество невыпукло, то его линейная оболочка получается как бы в результате «заполнения» всех его «невыпуклостей».

Выпуклая оболочка конечного числа точек в E^n называется *выпуклым многогранником* — ограниченным многогранным выпуклым множеством. Оно представляет собой множество всех выпуклых линейных комбинаций данных точек. Замкнутое ограниченное выпуклое множество есть выпуклая оболочка своих крайних точек.

Пусть A — некоторое выпуклое замкнутое множество в E^n, а $\mathbf{y}$ — точка в E^n, не принадлежащая множеству A. Тогда существует *ограничивающая гиперплоскость* $H = \{\mathbf{x} \in E^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b\}$, содержащая $\mathbf{y}$, такая, что все точки множества A лежат в одном из замкнутых полупространств, определяемых гиперплоскостью H, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j y_j = b \text{ и либо } \sum_{j=1}^{n} a_j z_j \leqslant b, \text{ либо } \sum_{j=1}^{n} a_j z_j \geqslant b \text{ при любом } \mathbf{z} \in A. \tag{A.5.3}$$

Если $\mathbf{y}$ — граничная точка A, то существует *опорная гиперплоскость* H, содержащая $\mathbf{y}$, такая, что все точки множества A лежат в одном из определяемых ею замкнутых полупространств. Пусть в E^n заданы два таких непустых выпуклых множества A и B, что они либо не имеют общих точек, либо их общими точками являются только граничные точки. Тогда существует *разделяющая гиперплоскость* H, такая, что все точки A лежат в одном из определяемых гиперплоскостью H замкнутых полупространств, а все точки B лежат в другом определяемом ею замкнутом полупространстве. Примеры перечисленных гиперплоскостей для пространства E^2 показаны на рис. А.1.

Вещественная функция $f(\mathbf{x})$, определенная на выпуклом множестве X, называется *выпуклой*, если при любых двух различных точках $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из X

$$f(a\mathbf{x}+(1-a)\,\mathbf{y}) \leqslant af(\mathbf{x})+(1-a)\,f(\mathbf{y}), \text{ где } 0 < a < 1. \tag{A.5.4}$$

Функция $f(\mathbf{x})$ называется *строго выпуклой*, если это неравенство выполняется как строгое неравенство. Функция $f(\mathbf{x})$ называется *вогнутой*, если $-f(\mathbf{x})$ выпуклая; функция $f(\mathbf{x})$ *строго вогнута*, если функция $-f(\mathbf{x})$ строго выпукла, т. е. знак неравенства в в (А.5.4) изменяется на противоположный. Говоря языком геометрии, некоторая функция в E^2 является выпуклой тогда, и только тогда, когда отрезок прямой, соединяющий любые две точки кривой ее графика, лежит не ниже данной кривой. Линейная функция

[1] Основная литература по выпуклым множествам и выпуклым функциям: [14, 15, 16].

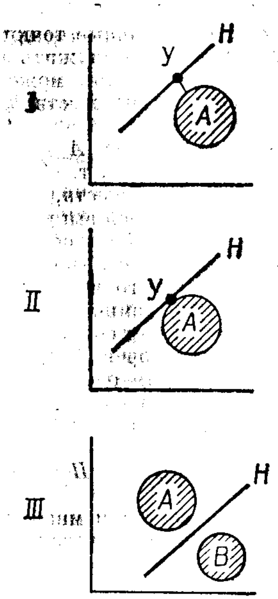


Рис. А.1. Ограничивающая, опорная и разделяющая гиперплоскости для выпуклых множеств.
I H — ограничивающая гиперплоскость для A.
II H — опорная гиперплоскость для A.
III H — разделяющая гиперплоскость для A.

является и выпуклой и вогнутой, но она не является ни строго выпуклой, ни строго вогнутой. На рис. А.2 показаны примеры выпуклой функции, строго вогнутой функции и функции, не являющейся ни выпуклой, ни вогнутой.

Если $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ есть заданные на X выпуклые функции, то функции $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, $\max[f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})]$, $cf(\mathbf{x})$, где $c \geqslant 0$, также выпуклы. Следовательно, неотрицательная взвешенная сумма выпуклых функций выпукла. Если $f(\mathbf{x})$ есть выпуклая функция, определенная на открытом выпуклом подмножестве X n-мерного евклидова пространства E^n, то $f(\mathbf{x})$ суть непрерывная функция на X.

Функция $f(\mathbf{x})$, заданная на выпуклом подмножестве X пространства E^n, будет выпуклой тогда, и только тогда, когда множество

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X,\ f(\mathbf{x}) \leqslant y\} \tag{A.5.5}$$

является выпуклым множеством в E^{n+1}.

Вещественная функция $f(\mathbf{x})$, определенная на выпуклом множестве X, называется *квазивыпуклой*, если при любых двух различных точках x и y из X

$$f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \leqslant \max[f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})] \text{ для всех } \alpha,\ 0 < \alpha < 1; \tag{A.5.6}$$

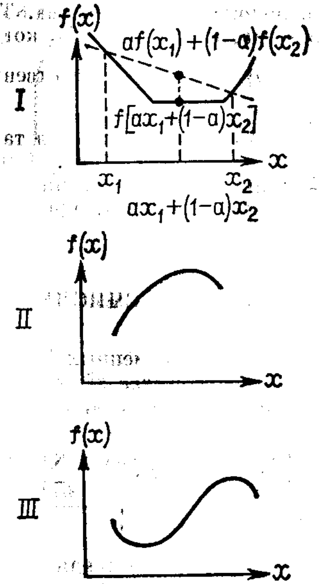


Рис. А.2. Выпуклые и вогнутые функции.
I — Выпуклая функция, не являющаяся строго выпуклой.
II — Строго вогнутая функция.
III — Функция, не являющаяся ни выпуклой, ни вогнутой.

$f(\mathbf{x})$ называется *строго квазивыпуклой*, если это неравенство выполняется как строгое неравенство; $f(\mathbf{x})$ *квазивогнута*, если $-f(\mathbf{x})$ квазивыпукла; $f(\mathbf{x})$ *строго квазивогнута*, если $-f(\mathbf{x})$ строго квазивыпукла. Таким образом, $f(\mathbf{x})$ строго квазивогнута, если при любых различных x и y из X выполняется неравенство

$$f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) > \min[f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})],\ 0 < \alpha < 1, \tag{A.5.7}$$

что следует из соотношения

$$\max_{\mathbf{x}\in X} -f(\mathbf{x}) = -\min_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}).$$

Функция $f(\mathbf{x})$ квазивыпукла тогда, и только тогда, когда множество

$$\{\mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) \leqslant b\} \ (b \text{ — любое вещественное число}) \tag{A.5.8}$$

является выпуклым; $f(\mathbf{x})$ строго квазивыпукла, если это неравенство выполняется как строгое неравенство; $f(\mathbf{x})$ квазивогнута, если выполняются противоположные неравенства. Таким образом, $f(\mathbf{x})$ строго квазивогнута тогда, и только тогда, когда множество

$$\{\mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) > b\} \quad (b \text{— любое вещественное число}) \qquad (A.5.9)$$

является выпуклым.

Выпуклая (вогнутая) функция является также квазивыпуклой (квазивогнутой), однако обратное неверно. Например, любая монотонно убывающая функция одной переменной (т. е. $f(x_1) > f(x_2)$, если $x_1 < x_2$) является квазивогнутой, однако она не обязательно будет вогнутой.

А-6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ [1]

Вещественная функция n переменных $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является *дифференцируемой в точке* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)'$, если существует набор из n чисел $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, такой, что

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \to 0} \frac{\left| f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) - \sum_{j=1}^{n} a_j h_j \right|}{\|\mathbf{h}\|} = 0, \qquad (A.6.1)$$

где $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)'$ — произвольная точка пространства E^n, $\|\mathbf{h}\|$ — норма $\mathbf{h}$. Числа a_j называются *частными производными*:

$$a_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (A.6.2)$$

Функция называется *дифференцируемой*, если она дифференцируема во всех точках своей области определения. В этом случае вектор (вектор-строка) частных производных функций

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right) \qquad (A.6.3)$$

называется *градиентом*. *Эластичностью* функции $f(\mathbf{x})$ по переменной x_j в точке $\mathbf{x}$ называется величина

$$\frac{x_j}{f(\mathbf{x})} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (A.6.4)$$

Функция называется *непрерывно дифференцируемой*, если она дифференцируема и все ее частные производные непрерывны.

Если все n частных производных дифференцируемы, то их также можно продифференцировать, в результате чего возникают частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (A.6.5)$$

[1] Основная литература по дифференциальному исчислению: [17, 6].

Матрица производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \qquad (A.6.6)$$

называется *матрицей Гессе*. Если $f(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (A.6.7)$$

т. е. значение производной не зависит от порядка дифференцирования. *Полным дифференциалом* функции $y = f(\mathbf{x})$ называется величина

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x})\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\, dx_n =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})\, dx_j. \qquad (A.6.8)$$

Вторым полным дифференциалом функции $y = f(\mathbf{x})$ называется величина

$$d^2 y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})\, dx_i\, dx_j. \qquad (A.6.9)$$

Если $f(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема, то ее можно следующим образом разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $\mathbf{x}^0$:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0)(x_j - x_j^0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^1)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0), \qquad (A.6.10)$$

где $\mathbf{x}^1 = a\mathbf{x}^0 + (1 - a)\mathbf{x}$, $0 < a < 1$.

Функция $f(\mathbf{x})$ называется *однородной функцией степени* h, если

$$f(\alpha \mathbf{x}) = f(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) = \alpha^h f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (A.6.11)$$

Так, например, линейная форма — это однородная функция первой степени, а квадратичная форма — однородная функция степени два. Согласно *теореме Эйлера*, если $f(\mathbf{x})$ — дифференцируемая и однородная функция степени h, то

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})\, x_j = hf(\mathbf{x}). \qquad (A.6.12)$$

Если $f(\mathbf{x})$ дифференцируема, то $f(\mathbf{x})$ является выпуклой функцией тогда, и только тогда, когда для любых двух точек

$$\mathbf{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}) \text{ и } \mathbf{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$$

$$f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})\,(x_{1j} - x_{2j}). \qquad (A.6.13)$$

Если $f(\mathbf{x})$ два раза дифференцируемая, то $f(\mathbf{x})$ является выпуклой функцией тогда, и только тогда, когда ее матрица Гессе положительно полуопределена или положительно определена; $f(\mathbf{x})$ является вогнутой функцией тогда, и только тогда, когда ее матрица Гессе отрицательно полуопределена или отрицательно определена.

А-7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ [1]

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные. *Обыкновенным дифференциальным уравнением* называется уравнение, в которое входят производные некоторой функции одной независимой переменной. Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение. Общее дифференциальное уравнение n-го порядка можно представить в виде

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, t\right), \qquad (A.7.1)$$

где t — независимая переменная, а $x = x(t)$, Решением уравнения (А.7.1) является любая функция $x(t)$, удовлетворяющая этому уравнению при всех возможных значениях t и удовлетворяющая, всем наложенным граничным условиям (например, $x(t_0) = x_0$, $\frac{dx}{dt}(t_1) = x_1$).

Общее дифференциальное уравнение n-го порядка эквивалентно системе n дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t). \end{aligned} \qquad (A.7.2)$$

[1] Основная литература по дифференциальным уравнениям: [18, 19, 20].

Действительно, если положить $x = x_1$, то система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \end{aligned} \qquad (A.7.3)$$

эквивалентна уравнению (А.7.1). Система (А.7.2) в векторных обозначениях может быть записана как

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \qquad (A.7.4)$$

где $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — векторы-столбцы:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \end{pmatrix}. \qquad (A.7.5)$$

Пусть при $t_1 = t_0$ на все переменные наложены граничные условия вида

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \qquad (A.7.6)$$

где $\mathbf{x}_0$ — заданный вектор-столбец. Пусть функции $f(\mathbf{x}, t)$ определены и непрерывны в некоторой области и, кроме того, удовлетворяют *условию Липшица*, т. е. для любых двух векторов $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ существует некоторое постоянное положительное число l, такое, что

$$\| f_j(\mathbf{x}^1, t) - f_j(\mathbf{x}^2, t) \| \leqslant l \, \| x_j^1 - x_j^2 \|, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (A.7.7)$$

Тогда система дифференциальных уравнений при данных граничных условиях имеет единственное решение. Если функции $\mathbf{f}(\cdot\,\cdot)$ дифференцируемы и их производные ограничены, то условие Липшица выполнено и, следовательно, существует единственное решение.

Система дифференциальных уравнений (А.7.4) называется *автономной*, если функции $\mathbf{f}(\cdot\,\cdot)$ не зависят явно от переменной t (времени), т. е.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \qquad (A.7.8)$$

Далее, точкой равновесия называется такая точка $\mathbf{x}^e$, в которой

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^e) = 0, \text{ т. е. } f_j(x_1^e, x_2^e, \ldots, x_n^e) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (A.7.9)$$

перемещения из точки равновесия не происходит. Точкой устойчивого равновесия называется точка равновесия, обладающая следующим свойством: если система начинает двигаться из некоторой точки, достаточно близкой к точке равновесия, то она будет перемещаться сколь угодно близко к этой точке. Таким образом, $\mathbf{x}^e$ является точкой устойчивого равновесия, если для любого $\varepsilon > 0$ существует зависящее лишь от ε число $\sigma > 0$, такое, что если

$$\begin{aligned} &\| x_j(t_0) - x_j^e \| < \sigma \quad \text{при всех } j, \\ \text{то } &\| x_j(t) - x_j^e \| < \varepsilon \quad \text{при всех } j,\ t > \tau, \end{aligned} \tag{A.7.10}$$

где τ — некоторое число, а $x^e(t)$ — решение (A.7.8) при условии (A.7.6). В противном случае $\mathbf{x}^e$ называется точкой неустойчивого равновесия. Равновесие в $\mathbf{x}^e$ называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и если любая траектория (решение системы), начинающаяся в некоторой определенной области, со временем приближается к $\mathbf{x}^e$, т. е. при любом фиксированном $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to \infty} | x_j(t) - x_j^e | < \varepsilon \quad \text{при всех } j, \tag{A.7.11}$$

где $\mathbf{x}(t_0)$ принадлежит к указанной области.

Согласно *второму методу Ляпунова*, равновесие в начале координат $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ является устойчивым, если для некоторой открытой области, близкой к началу координат, можно найти непрерывно дифференцируемую функцию $V(\mathbf{x})$ со следующими свойствами:

$$V(\mathbf{x}) \geqslant 0; \ V(\mathbf{x}) = 0 \text{ лишь при } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} \leqslant 0; \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \text{ лишь при } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{A.7.12}$$

где $\mathbf{x}$ — любая точка из указанной открытой области. Функция $V(\mathbf{x})$ называется *функцией Ляпунова*. Если, кроме того, $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ только при $\mathbf{x} = 0$, то начало координат является точкой асимптотически устойчивого равновесия. Так как функция Ляпунова положительная всюду, кроме точки равновесия, то ее можно интерпретировать как меру расстояния до точки равновесия. Поскольку производная по времени t неположительна всюду и равна нулю в точке равновесия, то это расстояние со временем уменьшается, так что в конце концов достигается состояние равновесия.

Система дифференциальных уравнений (A.7.9) называется *линейной*, если все производные входят в эти уравнения в первой степени и не встречаются произведения производных. Например, автономная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными (т. е. не зависящими от t) коэффициентами имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{A.7.13}$$

или в векторных обозначениях

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{A.7.14}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{A.7.15}$$

Очевидно, что точка $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ является точкой равновесия этой системы.

В системе, состоящей из одного уравнения ($n = 1$), уравнение $\dot{x} = ax$ можно записать в виде

$$\frac{dx}{x} = a\,dt. \tag{A.7.16}$$

Решение

$$x = ce^{at} \tag{A.7.17}$$

этого уравнения можно получить непосредственным интегрированием. Константа c зависит от граничного условия ($c = e^{-at_0}x_0$). Равновесие при $x = 0$ является устойчивым, если $a < 0$, так как при этом функция Ляпунова $V(x) = x^2$.

В общем случае решение (A.7.13) имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_{1n}e^{\lambda_n t} \\ x_2 &= c_{21}e^{\lambda_1 t} + c_{22}e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_{2n}e^{\lambda_n t} \\ &\vdots \\ x_n &= c_{n1}e^{\lambda_1 t} + c_{n2}e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_{nn}e^{\lambda_n t}, \end{aligned} \tag{A.7.18}$$

где постоянные c_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) определяются из граничных условий (A.7.6), а λ_i—характеристические корни матрицы $\mathbf{A}$ (предполагается, что эти корни различны). Равновесие при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ является асимптотически устойчивым, если все характеристические корни имеют отрицательные вещественные части.

Решениями системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{A.7.19}$$

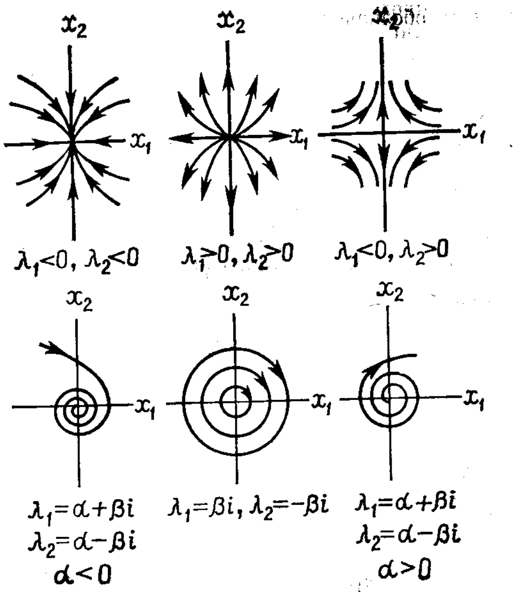
являются

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}e^{\lambda_2 t} \\ x_2 &= c_{21}e^{\lambda_1 t} + c_{22}e^{\lambda_2 t}, \end{aligned} \tag{A.7.20}$$

где λ_1 и λ_2—корни уравнения

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{A.7.21}$$

Траектории движения этой системы могут быть изображены графически на плоскости (x_1, x_2). Начало координат является точкой равновесия, а поведение траектории вблизи начала координат определяется характеристическими корнями λ_1 и λ_2. Если эти корни вещественные и отрицательные, то траектории приближаются к началу



Р и с. А.3. Примеры возможных траекторий.

координат, которое в этом случае является *устойчивым узлом*. Если корни вещественные и положительные, то траектории удаляются от начала координат, которое в этом случае является *неустойчивым узлом*. Если корни вещественные и имеют противоположные знаки, то существует геометрическое место точек, называемое *сепаратрисой*, разделяющее плоскость на две области, причем траектории приближаются к началу координат лишь вдоль сепаратрисы. Начало координат в этом случае является *седловой точкой*. Если корни комплексные, то они являются комплексно сопряженными ($\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$), при этом вид траекторий зависит от вещественной части корня (α). Если вещественные части корней отрицательны, то траектории спиралевидно приближаются к началу координат, являющемуся *устойчивым фокусом*; если вещественные части равны нулю, то траектории имеют эллипсообразную форму и стягиваются к началу координат, являющемуся центром; если вещественные части положительны, то траектории удаляются по спирали от начала координат, являющегося *неустойчивым фокусом*. На рис. А.3 даны иллюстрации к перечисленным случаям. Изображенные в верхней части рисунка три типа точек для случая вещественных характеристических корней соответствуют простейшей системе второго порядка: $\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1$, $\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Нелинейные системы второго порядка можно анализировать в некоторой окрестности точки равновесия с помощью линейных

аппроксимаций функций в этой точке. Так, если $\mathbf{x} = \mathbf{x}^e$ есть точка равновесия системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2), \end{aligned} \qquad \text{(A.7.22)}$$

то после замены функций $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ их линейными аппроксимациями в окрестности $\mathbf{x}^e$ система преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &\cong \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^e)\, x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^e)\, x_2 \\ \dot{x}_2 &\cong \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^e)\, x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^e)\, x_2. \end{aligned} \qquad \text{(A.7.23)}$$

Теперь поведение системы в окрестности $\mathbf{x}^e$ определяется характеристическими корнями матрицы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^e) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^e) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^e) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^e) \end{pmatrix}. \qquad \text{(A.7.24)}$$

Например, если корни вещественные и положительные, то точка равновесия является седловой точкой.